

TOMO II

MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS

Estática vectorial

Lacides Pinto Mindiola
Olenka Gómez Julio
Fernando Ariza Daza



UNIVERSIDAD DE LA GUAJIRA | SHIKI EKIRAJA
PULEE WAJIIRA

MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS:

Estática vectorial Tomo II

MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS:

Estática vectorial Tomo II

Lacides Pinto Mindiola
Olenka Gómez Julio
Fernando Ariza Daza



UNIVERSIDAD | SHIKII EKIRAJIA
DE LA GUAJIRA | PULEE WAJIIRA

MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS:
Estática vectorial Tomo II

© Lacides Pinto Mindiola
Olenka Gómez Julio
Fernando Ariza Daza

© Universidad de La Guajira
Primera edición, 2020

ISBN: 978-958-5178-31-1

Directivas académicas

Carlos Arturo Robles Julio
Rector

Hilda María Choles Almazo
Vicerrectora Académica

Víctor Pinedo Guerra
Vicerrector de Investigación y Extensión

Sulmira Patricia Medina
Directora Centro de Investigaciones

Depósito legal

Reservados todos los derechos de esta edición

Portada:

<https://www.beautyppt.com/mechanical-lifting-equipment.html>

Impresión:

Editorial Gente Nueva

Impreso en Colombia
Printed in Colombia

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por el maravilloso regalo de la vida y por permitirnos compartir estas experiencias académicas.

A nuestras parejas e hijos, compañeros de lucha en la vida, por su enorme comprensión y aún más por motivarnos diariamente en el logro de nuestros propósitos.

Los autores.

Contenido

	Pág.
Prólogo.....	13
Introducción.....	15

CAPÍTULO I

Centro de gravedad y Centroides.....	17
Sistemas de fuerzas distribuidas.....	17
Punto de aplicación de la fuerza resultante.....	18
Centro de gravedad.....	19
Centro de gravedad de un sistema material discreto.....	19
Momentos de primer orden de un sistema de partículas.....	21
Centro de gravedad de un sistema material continuo (cuerpo)	22
Problema ilustrativo 1.....	24
Problema ilustrativo 2.....	25
Problema ilustrativo 3.....	26
Centroides	29
Propiedades del centroide de un área.....	30
Problema ilustrativo 1.....	30
Problema ilustrativo 2.....	32
Problema ilustrativo 3.....	33
Problema ilustrativo 4.....	34
Centroides y centro de gravedad de figuras y cuerpos compuestos	35
Centroides de figuras compuestas.....	36
Centro de gravedad de un cuerpo compuesto.....	36
Problema ilustrativo 1.....	37
Problema ilustrativo 2.....	38
Problema ilustrativo 3.....	38
Problema ilustrativo 4.....	39
Problema ilustrativo 5.....	41

CAPÍTULO II

Equilibrio de un cuerpo rígido.....	43
Condición necesaria para el equilibrio de un cuerpo rígido.....	43
Equilibrio en el plano.....	48
Vínculos.....	48
Vínculos internos.....	48
Vínculo interno de primera especie.....	48
Vínculo interno de segunda especie.....	49
Vínculo interno de tercera especie.....	49
Vínculos externos.....	50
Vínculo de primera especie.....	50
Vínculo de segunda especie.....	50
Vínculo de tercera especie.....	51
Vínculo y sus reacciones.....	51
Hipótesis para el cálculo de las reacciones de los vínculos.....	52
Reacciones de los vínculos sobre un cuerpo sometido a la acción de un sistema de Fuerza Coloidal.....	52
Rodillo o articulación móvil.....	52
Articulación.....	53
Empotramiento.....	53
Diagrama de cuerpo libre (DCL).....	53

CAPÍTULO III

Estructuras: armaduras- bastidores.....	57
Hipótesis para el análisis de las armaduras.....	58
Equilibrio.....	58
a) Armaduras o cerchas.....	59
Método de los nodos.....	60
Problema Ilustrativo 1.....	61
Método de las secciones o de Ritter.....	64
b) Bastidores o marcos.....	65
Problema Ilustrativo 1.....	67
Problema Ilustrativo 2.....	71
Problema Ilustrativo 3.....	80
Referencias bibliográficas.....	87

Índice de figuras

	Pág.
Figura 1.1. Fuerza distribuida en un plano	17
Figura 1.2. Sistema de referencia tridimensional $\{x,y,z\}$	19
Figura 1.3. Sistema material discreto	20
Figura 1.4. Sistema material continuo	22
Figura 1.5. Ilustración Centro de gravedad del elemento	24
Figura 1.6. Ilustración del problema 2	25
Figura 1.7. Ilustración del centro de masa del cuerpo.....	26
Figura 1.8. Posición del centro de masa de un hemisferio.....	27
Figura 1.9. Ilustración del problema 3	27
Figura 1.10. Dimensiones del triángulo rectángulo.....	30
Figura 1.11. Centroide del triángulo rectángulo	31
Figura 1.12. Elemento de área del triángulo rectángulo	31
Figura 1.13. Centroide del triángulo problema 2	32
Figura 1.14. Coordenada Y del centroide de un triángulo	32
Figura 1.15. Coordenadas del centroide de una superficie plana	33
Figura 1.16. Centroide del cuadrante de un arco	35
Figura 1.17. Localización del centroide de área	37
Figura 1.18. Localización del centroide de la superficie de dos figuras.....	38
Figura 1.19. Centroide del área de una figura compuesta.....	38
Figura 1.20. Centroide de una figura irregular.....	39
Figura 1.21. Ilustración del centroide figura irregular	40
Figura 1.22. Centroide del área problema ilustrativo 5	41
Figura 2.1 (a). Cuerpo rígido en equilibrio.....	43
Figura 2.1 (b). Condiciones para el equilibrio de un cuerpo.....	44
Figura 2.1 (c). Resultante de las fuerzas internas y externas de un cuerpo.....	45

Figura 2.2. Momento de las fuerzas actuantes sobre un cuerpo	46
Figura 2.3. Momento de fuerzas actuantes en infinitas partículas de un cuerpo.....	46
Figura 2.4. Vínculo interno de primera especie	49
Figura 2.5 Vínculo interno de segunda especie.....	49
Figura 2.6. Vínculo interno de tercera especie	49
Figura 2.7. Vínculo externo de primera especie.....	50
Figura 2.8. Vínculo externo de segunda especie	50
Figura 2.9. Vínculo externo de segunda especie	51
Figura 2.10. Vínculo externo de tercera especie.....	51
Figura 2.11. Vínculo externo de primera especie-Rodillo articulación móvil.....	52
Figura 2.12. Vínculo externo de segunda especie-articulación.....	53
Figura 2.13. Vínculo externo de segunda especie-Empotramiento.....	53
Figura 2.14. Vínculos y sus reacciones en dos dimensiones.....	55
Figura 3.1. Modelo de armadura	60
Figura 3.2. Fuerzas sobre el nodo de la armadura	60
Figura 3.3. Ilustración problema ilustrativo 1	61
Figura 3.4. Diagrama de cuerpo libre problema ilustrativo 1.....	62
Figura 3.5. Diagrama de cuerpo libre del nodo.....	62
Figura 3.6. Diagrama de cuerpo libre del nodo B	63
Figura 3.7. Modelo de bastidor 1.....	66
Figura 3.8. Modelo de bastidor 2.....	66
Figura 3.9. Modelo de bastidor 3.....	66
Figura 3.10. Modelo de bastidor 4.....	67
Figura 3.11. Bastidor problema ilustrativo 1	67
Figura 3.12. Diagrama de cuerpo libre bastidor problema 1.....	68
Figura 3.13. Diagrama de cuerpo libre del miembro ABCD.....	69
Figura 3.14. Equilibrio estático elemento BE.....	70
Figura 3.15. Diagrama de cuerpo libre de todas las fuerzas en ABCD	70
Figura 3.16. Figura de Bastidor del problema ilustrativo 2.....	71
Figura 3.17. Diagrama de cuerpo libre barra AB.....	72

Figura 3.18. Diagrama de cuerpo libre miembro AB	72
Figura 3.19. Nuevo diagrama de cuerpo libre parte (a)	74
Figura 3.20. Bastidor con cargas externas	75
Figura 3.21. Diagrama de cuerpo libre definitivo del Bastidor	77
Figura 3.22. Estructura completa de un Bastidor.....	78
Figura 3.23. Diagrama de cuerpo libre definitivo de un bastidor	80
Figura 3.24. Bastidor y sistema de cargas aplicadas.....	81
Figura 3.25. Diagrama de cuerpo libre del bastidor completo	81
Figura 3.26. Diagrama de cuerpo libre del elemento BEH	82
Figura 3.27. Nuevo diagrama de cuerpo libre del elemento BEH.....	83
Figura 3.28. Diagrama de cuerpo libre barra DABC	83
Figura 3.29. Nuevo diagrama de cuerpo libre de la barra DA.....	84
Figura 3.30. Diagrama de cuerpo libre de la barra DEF	85
Figura 3.31. Nuevo diagrama de cuerpo libre de la barra DEF.....	85
Figura 3.32. Bastidor completo.....	86

Índice de Tablas

	pág.
Tabla 1. Resumen del elemento de maquinaria.....	25
Tabla 2. Resumen del problema 2.....	26
Tabla 3. Resumen localización del centroide de áreas.....	37
Tabla 4. Localización del centroide de la superficie de dos figuras.....	38
Tabla 5. Centroides del área de una figura compuesta.....	39
Tabla 6. Centroides del área de una figura irregular	40
Tabla 7. Centroides del área problema ilustrativo 5	41

Prólogo

Para los autores, ha resultado satisfactorio presentar a todos los estudiantes de ingeniería y carreras similares, y en general, a aquellos que tienen la inquietud de crecer en el inmenso océano del conocimiento de la “Mecánica vectorial, Estática”, publicar el tomo II, con la finalidad de continuar con los temas complementarios al primer tomo, temas que han sido minuciosamente analizados y organizados, con la única pretensión de aportarlo como una buena herramienta teórica- práctica con lo que todos los lectores se sentirán afianzados. En consecuencia, la estructuración del texto incluye conceptos sobre Centro de gravedad, centro de masa de las figuras, equilibrio de cuerpos rígidos y estructuras cómo, armaduras y bastidores, entre otros conceptos relevantes a los enunciados y que han sido incluidos en este tomo.

Estamos totalmente seguros de la enorme utilidad que representará el texto, el cual ha sido organizado de manera breve, clara y precisa en tres capítulos, contenidos por conceptos teóricos relevantes relacionados a las temáticas anteriormente escritas y complementados con ejercicios de aplicación que consolidarán los conocimientos del lector sobre el objeto de estudio que finalmente, serán representados con problemas de aplicación ilustrados e incluidos en cada capítulo. En otras palabras, con la consolidación de los conocimientos entendemos que el objeto a estudiar, estará claro y aprehendido a cabalidad en su naturaleza

Por último, los escritores del libro asumen conscientemente los errores que por efectos de publicación se presenten en el documento final, por ello, humildemente, pedimos disculpas a todos los lectores.

Introducción

La Estática, como parte de la mecánica vectorial, está fundamentalmente orientada al análisis de las cargas que actúan sobre un cuerpo, llámense fuerzas o momentos, así como, de las leyes que regulan el equilibrio estático de este. De tal modo, para que un cuerpo, permanezca en equilibrio, es necesario que la suma vectorial de todas las fuerzas y momentos que actúan en él sean nula, y que además no generen cambios en sus posiciones relativas; de esta manera el equilibrio de un cuerpo tendrá lugar cuando su velocidad y aceleración sean iguales a cero.

Teniendo presente el concepto general de la estática, y conscientes de la herramienta primordial que constituye su estudio en el campo de la ingeniería y carreras afines, se hace relevante el desarrollo de este texto, el cual es una secuencia de los temas básicos que fueron incluidos en la Estática tomo I, publicada por los autores. En este sentido, el contenido de este libro “Mecánica Vectorial para ingenieros: Estática Tomo II”, procura familiarizar al lector con conceptos como, centro de gravedad y Centroides de las figuras geométricas; estructuras; especialmente, armaduras y bastidores; en consecuencia, el contenido está estructurado en tres capítulos con las temáticas referenciadas anteriormente.

La primera parte del libro, capítulo I, se enfoca al estudio de temas como, centro de gravedad de sistemas materiales discretos y continuos, Centroides, Sistemas de fuerzas distribuidas y Punto de aplicación de la fuerza resultante; con el desarrollo de este, el estudiante aprenderá a localizar el centro de gravedad y el centroide de los cuerpos y las figuras compuestas.

El capítulo II, continua con los fundamentos de Equilibrio de un cuerpo rígido y las condiciones necesarias para el equilibrio, equilibrio en el plano y los vínculos internos y externos de primera, segunda y tercera especie, además, relaciona las hipótesis para el cálculo de las reacciones en los vínculos y las reacciones de los vínculos sobre un cuerpo sometido a la acción de un sistema de fuerzas coloidales.

El capítulo II, continua con los fundamentos de Equilibrio de un cuerpo rígido y las condiciones necesarias para el equilibrio, equilibrio en el plano y los vínculos internos y externos de primera, segunda y tercera especie, además, relaciona las hipótesis para el cálculo de las reacciones en los vínculos y las reacciones de los vínculos sobre un cuerpo sometido a la acción de un sistema de fuerzas coloidales.

CAPÍTULO I

Centro de gravedad y Centroides

El contenido de este capítulo, pretende familiarizar al lector con los conceptos claves de Centro de gravedad y Centroides de los cuerpos y de las figuras geométricas. Con el desarrollo de los temas claves incluidos en este apartado, el lector aprenderá a localizar también el centro de gravedad y el centroide de los cuerpos y las figuras compuestas.

Sistemas de fuerzas distribuidas

En general, los sistemas de fuerzas se consideran como un conjunto de fuerzas concentradas. Esto es una idealización, ya que en la práctica no es posible aplicar una fuerza sobre un solo punto. Esto ocurre, cuando el área sobre la cual se distribuye una fuerza es despreciable en comparación con las dimensiones del cuerpo.

En la vida real, las fuerzas normalmente actúan sobre una superficie, dando de esta manera lugar a un conjunto infinito de fuerzas concentradas, cada una actuando sobre una pequeña porción de la superficie considerada. Ejemplo de las fuerzas distribuidas lo constituyen el peso de una pared, de una pila de arena, la fuerza del viento, la fuerza que ejerce un líquido en el fondo y paredes de un tanque.

Las fuerzas distribuidas, pueden representarse graficando la fuerza por unidad de longitud (N/m, Ib/ft, etc.) sobre el eje de las ordenadas y que llamaremos intensidad de la fuerza y en el eje de las abscisas representaremos los puntos del cuerpo sobre los cuales actúan la fuerza distribuida. Ver Figura 1.1.

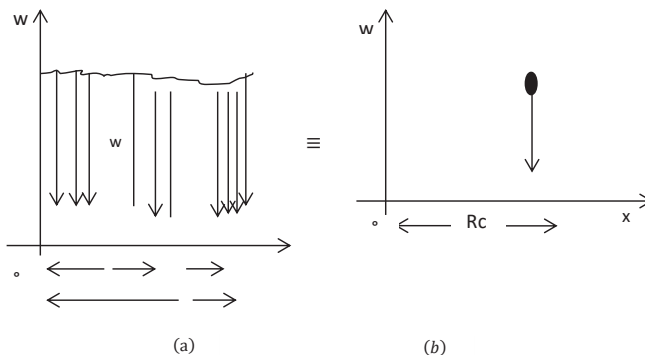


Figura 1.1 Fuerza distribuida en un plano
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

La magnitud de la fuerza ejercida sobre un diferencial de longitud dx del cuerpo es:

$$dw = wdx = Da \quad (1.1)$$

Siendo,

dw : la magnitud de la fuerza ejercida sobre un diferencial de longitud dx

w : Intensidad de la fuerza distribuida a una distancia x del origen del sistema.

dx : diferencia de longitud tomado del cuerpo rígido sobre el cual actúa la fuerza distribuida.

dA Diferencia de área comprendida por el diferencial de longitud dx y la intensidad W a la distancia x del origen.

La fuerza resultante (ver figura 1.1. (b)) soportada por el cuerpo rígido es:

$$W = \int_0^L wdx = \int_A dA = A \quad (1.2)$$

Conclusión: La magnitud de la fuerza resultante W , es igual al área total debajo la curva de la fuerza distribuida.

Punto de aplicación de la fuerza resultante

Como una fuerza distribuida es realmente un sistema de fuerzas paralelas, entonces el sistema puede reducirse a una fuerza única W , ya que existe un punto para el cual la resultante \mathbf{W} , es perpendicular al momento \vec{M}_O^R . Por lo tanto, el momento de la resultante \mathbf{W} respecto del origen O , \vec{M}_O^R debe ser igual a la suma de los momentos de las fuerzas diferenciales dw respecto del punto o . Entonces:

$$\vec{M}_O^R = x_c \mathbf{W} = \int xdw = x_c A$$

$$x_c = \frac{\int x dW}{A} = \frac{\int x dA}{A}$$

En donde:

x_c : es la abscisa del centroide del área debajo de la curva de la fuerza distribuida.

Conclusión: Un sistema de fuerza distribuida puede sustituirse por una fuerza única, concentrada de magnitud igual al área debajo de la curva y su recta de acción pasa a través del centroide del área.

Centro de gravedad

La fuerza con que la Tierra atrae a una partícula de un cuerpo se denomina peso de la partícula.

En general, un cuerpo está formado por partículas y obviamente a cada una de ellas, se asocia un peso o fuerza de atracción dirigida hacia el centro de la Tierra, formándose así uno de los sistemas de fuerzas distribuidas (fuerzas paralelas), más comunes que, podemos obtener en las prácticas. Ver la figura 1.2, en la cual se refiere el cuerpo a un sistema de referencia tridimensional $\{x, y, z\}$.

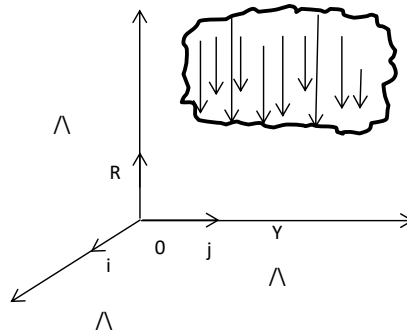


Figura 1.2 sistema de referencia tridimensional $\{x, y, z\}$

Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Cada una de las fuerzas paralelas debido a los pesos de las partículas forman un sistema de fuerzas distribuidas, que puede reducirse a una fuerza y un par aplicados en el origen del sistema de coordenadas y perpendiculares entre sí, siendo la fuerza paralela al eje z y el par perpendicular a dicho eje. Haciendo esta operación para cada una de las fuerzas, se obtiene un sistema equivalente de fuerzas y pares aplicados en o. El sistema resultante será un sistema fuerza-par (\vec{F}_R, \vec{M}_O^R) perpendiculares entre sí, también aplicado en o, siendo \vec{F}_R paralela al eje z, Y \vec{M}_O^R perpendicular a este eje, entonces, el sistema puede reducirse a una fuerza única resultante. El punto de aplicación de la resultante o peso del cuerpo, se define como centro de gravedad del cuerpo o en forma equivalente, centro de masa.

Seguidamente, vamos a aprender a determinar su ubicación para distintos tipos de sistemas materiales.

Centro de gravedad de un sistema material discreto

Consideremos un sistema material discreto (figura 1.3), formado por n partículas $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ de peso $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ y vectores de posición

$\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n\}$ según el origen del sistema de referencia $\{xyz\}$ al cual se asocia la terna de vectores unitarios $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$

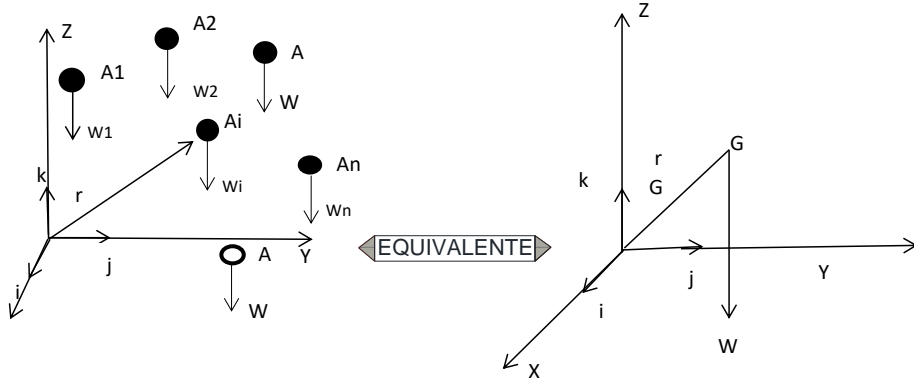


Figura 1.3 Sistema material discreto
 Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

La fuerza resultante (el peso) del sistema de fuerzas viene dado por:

$$\vec{W} = w_1 \hat{k} - w_2 \hat{k} - w_3 \hat{k} - \dots - w_n \hat{k} = -\sum_{i=1}^n w_i \hat{k} = -\hat{k} \quad (1.4)$$

El momento resultante de las fuerzas componentes con respecto al origen del sistema:

$$\vec{M}_O^R = \vec{r}_1 \times \vec{w}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{w}_2 + \dots + \vec{r}_n \times \vec{w}_n \quad (1.5)$$

Reemplazando a $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n\}$ en función de sus componentes rectangulares y a $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n\}$ en función del vector unitario tenemos que:

$$\vec{M}_O^R = (x_1 \hat{i} + y_1 \hat{j} + z_1 \hat{k}) \times w_1 (-\hat{k}) + (x_2 \hat{i} + y_2 \hat{j} + z_2 \hat{k}) \times w_2 (-\hat{k}) + \dots + (x_n \hat{i} + y_n \hat{j} + z_n \hat{k}) \times w_n (-\hat{k}) \quad (1.6)$$

Realizando los productos vectoriales indicados en (1.6).

$$\vec{M}_O^R = (X_1 \hat{j} - y_1 \hat{i}) W_1 + (X_2 \hat{j} + y_2 \hat{i}) W_2 + \dots + (X_n \hat{j} - y_n \hat{i}) W_n \quad (1.7)$$

$$\vec{M}_O^R = \hat{j} \sum_{i=1}^n X_i W_i - \hat{i} \sum y_i W_i$$

Como el sistema formado por las componentes de todos los pesos, $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n\}$ es equivalente al sistema formado por la fuerza única w , entonces los momentos de ambos sistemas respecto del punto o son iguales y por lo tanto.

$$\vec{M}_O^R = \vec{r}_G \times \vec{W} = \hat{j} \sum_{i=1}^n X_i W_i - \hat{i} \sum y_i W_i \quad (1.8)$$

Pero si expresamos a en función de sus componentes rectangulares, se tiene que:

$$\vec{r}_G \times \vec{W} = (X_G \hat{i} + y_G \hat{j} + z_G \hat{k}) \times \quad (1.9)$$

Igualando (1.5) con (1.6);

$$(W X_G \hat{i} - W y_G \hat{j}) = \hat{j} \sum_{i=1}^n X_i W_i - \hat{i} \sum_{i=1}^n y_i W_i \quad (1.10)$$

Igualando las componentes \hat{i} y \hat{j} de los vectores dados Por (1.10)

$$\hat{j}: W X_G = \sum_{i=1}^n X_i W_i \Rightarrow X_G = \frac{\sum_{i=1}^n X_i W_i}{W} \quad (1.11)$$

$$\hat{i}: W y_G = \sum_{i=1}^n y_i W_i \Rightarrow y_G = \frac{\sum_{i=1}^n y_i W_i}{W} \quad (1.12)$$

Si cambiamos el sistema de referencia el eje y por el z (paralelo al sistema de fuerzas paralelas), entonces, podemos también obtener:

$$Z_G = \frac{\sum_{i=1}^n Z_i W_i}{W} \quad (1.13)$$

En donde:

- X_G, Y_G, Z_G : son las coordenadas rectangulares del centro de gravedad.
- W es el peso del sistema de partículas los numeradores (1.11), (1.12) y (1.13), o sea, $\sum_{i=1}^n X_i W_i$, $\sum_{i=1}^n Y_i W_i$, $\sum_{i=1}^n Z_i W_i$ Reciben el nombre de:

Momentos de primer orden de un sistema de partículas

Ahora bien, si en las ecuaciones (1.11), (1.12) y (1.13) reemplazamos a

W_i y W ;

$W_i = m_i g$ y $W = m g$

En donde:

- m_i : es la masa de una partícula genérica del sistema.
- m : es la masa total del sistema.
- g : es la aceleración de la gravedad.

Las ecuaciones mencionadas, se transforman en;

$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^n X_i m_i g}{m g}, \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i g}{m g}, \quad Z_G = \frac{\sum_{i=1}^n z_i m_i g}{m g} \quad (1.14)$$

Las ecuaciones (1.14) nos muestran la forma de calcular las coordenadas del centro de masa del sistema de partículas, las cuales como podemos

fácilmente comprobar nos enseña que, en general, el centro de gravedad y el centro de masa coinciden, en un sistema material discreto.

Centro de gravedad de un sistema material continuo (cuerpo)

Como un cuerpo está formado por un número de partículas incontables, la localización del centro de gravedad por el método aplicado a un sistema de partículas (sistema material discreto) es prácticamente imposible.

Consideremos el cuerpo representado en la figura 1.3; si suponemos que el cuerpo está formado por un número infinito de elementos de masa diferencial dm y volumen dv , tal como se muestra en la figura 1.4, entonces podemos calcular su peso así:

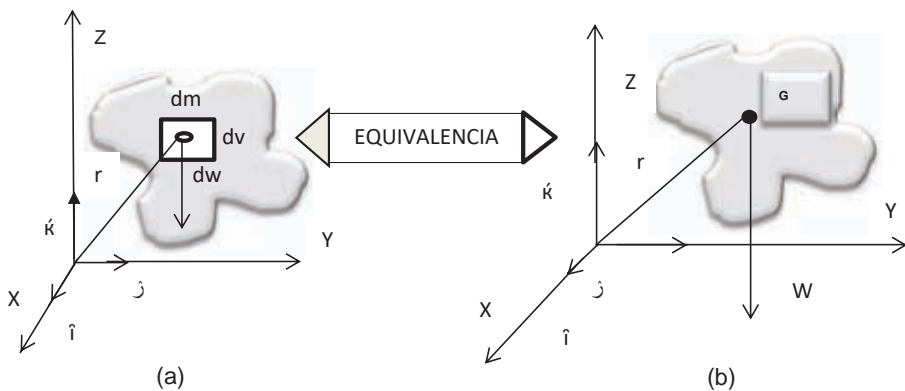


Figura.1.4 sistema material continuo
 Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

NOTA: figuras a y b respectivamente

$$d\vec{w} = \hat{k}\rho g dv \quad (1.15)$$

En donde:

- ρ : densidad del elemento diferencial genérico de masa dm y volumen dv
- dw : peso del elemento genérico.
- g : aceleración de la gravedad.
- dv : diferencial de volumen del elemento genérico.

El peso total del cuerpo será, entonces:

$$\vec{W} = -\hat{k} \int_V g dv \quad (1.16)$$

Ahora bien, el momento producido por el diferencial de respecto del punto O, origen del sistema, es

$$d\vec{M} = \vec{x} d\vec{w} \quad (1.17)$$

Si expresamos el vector posición en función de sus componentes rectangulares y adw por su valor dado en la ecuación (1.15) tenemos que,

$$d\vec{M}_0 = (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) + (\hat{k}\rho g dv)$$

$$\therefore d\vec{M}_0 = x\rho g dv\hat{j} - y\rho g dv\hat{i}$$

Y en consecuencia el momento resultante del sistema de fuerzas distribuidas, respecto del origen es,

$$\vec{M}_0^R = \hat{j} \int_V x \rho g dv - \hat{i} \int_V y \rho g dv \quad (1.18)$$

Pero sabemos que, el sistema de fuerzas distribuidas es equivalente al sistema formado por una fuerza única w , tal y como, lo muestran las figuras (a y b), por lo tanto, los momentos de ambos sistemas respecto del punto O son iguales. Entonces,

$$\vec{M}_0^R = \vec{r}_G \times \vec{W} = \hat{j} \int_V x \rho g dv - \hat{i} \int_V y \rho g dv \quad (1.19)$$

Expresando a en función de sus componentes rectangulares y W en función del vector unitario,

$$(x_G\hat{i} + y_G\hat{j} + z_G\hat{k}) + (-\hat{k}w) = \hat{j} \int_V x \rho g dv - \hat{i} \int_V y \rho g dv \quad (1.20)$$

Realizando los productos vectoriales indicados en el primer miembro de (1.20) e igualando las componentes vectoriales,

$$\hat{j} : x_G \vec{W} = \int_V x \rho g dv$$

$$\hat{i} : y_G \vec{W} = \int_V y \rho g dv$$

Reemplazando 14/por su magnitud dada en (12) obtenemos que,

$$x_G = \frac{\int_V x \rho g dv}{\int_V \rho g dv} \quad ; \quad y_G = \frac{\int_V y \rho g dv}{\int_V \rho g dv} \quad (1.21)$$

Si ρ es constante, entonces el cuerpo es homogéneo y las ecuaciones (1.21) se reducen a,

$$x_G = \frac{\int_V x dv}{\int_V dv} = \frac{\int_V x dv}{V} \quad (1.22)$$

$$y_G = \frac{\int_V y dv}{\int_V dv} = \frac{\int_V y dv}{V} \quad (1.23)$$

Análogamente podemos obtener,

$$z_G = \frac{\int_V z dv}{\int_V dv} = \frac{\int_V z dv}{V} \quad (1.24)$$

Los numeradores de (1.22), (1.23) y (1.24) dados por $\frac{\int_V x dv}{V}$, $\frac{\int_V y dv}{V}$, $\frac{\int_V z dv}{V}$,
Reciben el nombre de momentos de primer orden y también se denominan momentos estáticos de volumen.

Las ecuaciones (1.22), (1.23) y (1.24), nos permiten calcular las coordenadas del centro de gravedad de un cuerpo. Estos valores, normalmente están tabulados en los textos, para facilitar su aplicación y evitar así, engorrosos cálculos que para el ejercicio profesional ocasionan molestias indeseables.

El sistema de referencia seleccionado y la simetría que posea un cuerpo homogéneo simplifican el problema de localización de su centro de masa o de su centro de gravedad. Para aprovechar estas facilidades, enunciamos las siguientes propiedades:

1. Si el origen del sistema de referencia coincide con el centro de gravedad, los momentos de primer orden se anulan, puesto que x , y y z son nulos, o sea

$$\frac{\int_V x dv}{V} = \frac{\int_V x dv}{V} = \frac{\int_V x dv}{V} = 0$$

2. Si un cuerpo tiene un plano de simetría, entonces el centro de gravedad está ubicado en el plano de simetría.
3. Si el cuerpo tiene un eje de simetría, entonces su centro de gravedad estará en el referido eje.
4. Si un cuerpo tiene un centro de simetría (un punto), entonces su centro de gravedad coincide con dicho punto.

Problema ilustrativo 1

Para el elemento de maquinaria mostrado en la figura 1.5, localice la coordenada y_g del centro de gravedad.

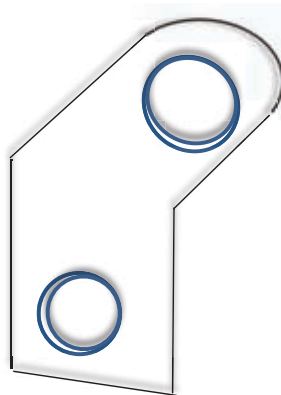


Figura.1.5. ilustración Centro de gravedad del elemento
Fuente: Mecánica. Ferdinand P. Beer and Johnston.2010

Solución:

Como el elemento de Maquinaria es homogéneo tiene Densidad constante, ver resumen del elemento de maquinaria en la tabla 1.

$$Y_G = \frac{\sum_{i=1}^5 y_i V_i}{\sum_{i=1}^5 V_i}$$

$$v_1 = \pi \times 30^2 \times 10 = -28262 \text{ mm}^3$$

$$v_2 = 120 \times 100 \times 10 = 120000 \text{ mm}^3$$

$$v_3 = \pi \times 40^2 \times 10 = 50240 \text{ mm}^3$$

$$v_4 = 120 \times 600 \times 10 = 72000 \text{ mm}^3$$

$$v_5 = 1/2 \times 60^2 \times 10 = 56520 \text{ mm}^3$$

Tabla 1. Resumen del elemento de maquinaria.

	Volumen (mm ³)	Yi (mm)	ViYi (mm ⁴)
v ₁	-28268	-50	1413000
v ₂	120000	-50	-600000
v ₃	50240	5	251200
v ₄	72000	-5	-360000
v ₅	56520	-5	-282600
Σ	270500	-	-4978400

Fuente: Pinto, Gómez y Ariza 2019

$$Y_G = \frac{\sum_{i=1}^5 y_i V_i}{\sum_{i=1}^5 V_i} = \frac{-4978400}{270500} = -18.40 \text{ mm}$$

$$\therefore Y_G = -18.40 \text{ mm}$$

Problema ilustrativo 2

Calcular el centro de masa y el centro de gravedad del cuerpo de la figura 1.6.

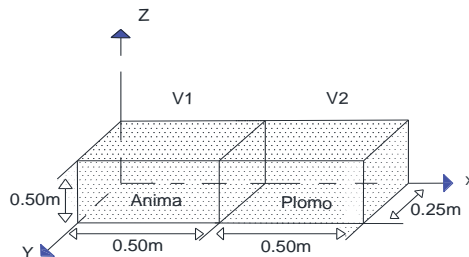


Figura.1.6. Ilustración del problema 2.

Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Datos:

Anime: densidad = 20 kg/m³. Ver la figura 1.7.



Figura.1.7. ilustración del centro de masa del cuerpo
 Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Plomo: densidad = 13600kg/m³

Solución: observar la tabla 2:

Tabla 2. Resumen del problema 2.

	volumen v_i	densidad ρ_i	$v_i \rho_i$	X_i	y_i	z_i	$x_i v_i \rho_i$	$y_i v_i \rho_i$	$z_i v_i \rho_i$
v_1	0.0625	20	1.25	0.125	0.25	0.25	0.15625	0.3125	0.315
v_2	0.0625	13600	850	0.125	0.75	0.25	106.25	637.50	212.50
Σ			851.25				106.41	673.81	212.82

Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

$$X_c = \frac{\sum_{i=1}^2 \rho_i v_i X_i}{\sum_{i=1}^2 \rho_i v_i} = \frac{106.41}{851.25} = 0.125\text{mm}$$

$$Y_c = \frac{\sum_{i=1}^2 \rho_i v_i y_i}{\sum_{i=1}^2 \rho_i v_i} = \frac{637.81}{851.25} = 0.749\text{mm}$$

$$Z_c = \frac{\sum_{i=1}^2 \rho_i v_i z_i}{\sum_{i=1}^2 \rho_i v_i} = \frac{212.82}{851.25} = 0.25\text{mm}$$

Problema ilustrativo 3

Centro de gravedad. Encontrar la posición del centro de masa de un hemisferio, en el cual la densidad en cualquier punto varía directamente con la distancia desde el punto a la base.

Solución:

Por simetría X_G y Y_G son nulos, para calcular la coordenada Z_G del centro de masa, escogemos como masa diferencial un disco delgado de radio r y espesor dz , por lo que la distancia de su centro de masa al plano XY es

proporcionalmente igual a Z del disco y además todos los puntos del disco están aproximadamente a la misma distancia de la base y por lo tanto tienen en teoría la misma densidad, ver las figuras 1.8 y 1.9.

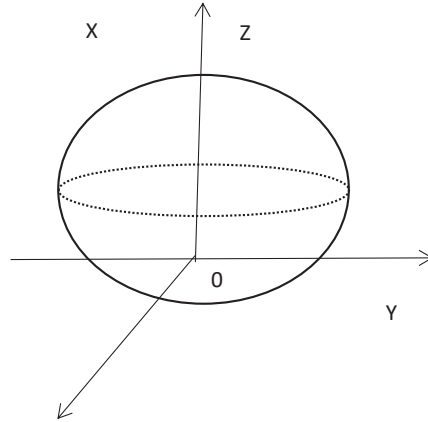


Figura.1.8. Posición del centro de masa de un hemisferio
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

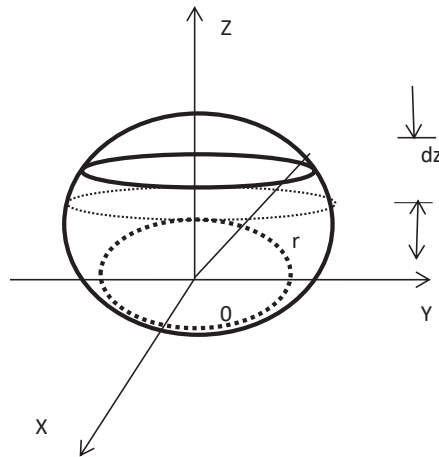


Figura 1.9. ilustración del problema 3.
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

La masa del elemento diferencial considerado es,

$$dm = \rho(z)dv = K_1 z\pi r^2 dz \quad (1)$$

Siendo:

$\rho(z) = K_1 z$ (Densidad del disco diferencial, K_1 es una constante de proporcionalidad)

Pero,

$$y^2 = r^2 - z^2 \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$dm = K_1 z \pi (r^2 - z^2) dz = K_1 \pi (r^2 z - z^3) dz$$

La masa total del hemisferio es,

$$m = K_1 \pi (r^2 z - z^3) dz = K_1 \pi (r^4) / 4 \quad (3)$$

El momento de primer orden de la masa diferencial dm es,

$$d\vec{M}_0 = z dm \hat{k} = K_1 \pi (r^2 z^2 - z^2) \hat{k} dz \quad (4)$$

Y el momento total de cada uno de los elementos diferenciales de masa con respecto al punto O es,

$$\hat{k} k_1 \pi \int_0^r (r^2 z^2 - z^4) dz = \frac{2K_1 \pi}{15} r^5 \hat{k} \quad (5)$$

Igualando el momento de primer orden de la masa resultante del hemisferio con el momento de primer orden dado por la ecuación (5), tenemos:

$$\frac{K_1 \pi}{4} Z_G \hat{k} = \frac{2K_1 \pi}{15} r^5 \hat{k} \quad (6)$$

Igualando las magnitudes de los vectores dados por (1.6) y simplificando:

$$Z_G = 8/15r$$

La masa del elemento diferencial considerado es,

$$dm = \rho(z) dv = K_1 z \pi y^2 dz \quad (1)$$

Siendo:

$\rho(z) = K_1 z$ (Densidad del disco diferencial, K_1 es una constante de proporcionalidad)

Pero,

$$y^2 = r^2 - z^2 \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$dm = K_1 z \pi (r^2 - z^2) dz = K_1 \pi (r^2 z - z^3) dz$$

La masa total del hemisferio es,

$$m = K_1 \pi (r^2 z - z^3) dz = K_1 \pi (r^4) / 4 \quad (3)$$

El momento de primer orden de la masa diferencial dm es,

$$d\vec{M}_O = zdm\hat{k} = K_1\pi(r^2z^2 - z^2)\hat{k} dz \quad (4)$$

y el momento total de cada uno de los elementos diferenciales de masa con respecto al punto O es,

$$= \hat{k}k_1 \pi \int_0^r (r^2z^2 - z^4) dz = \frac{2K_1\pi}{15} r^5\hat{k} \quad (5)$$

Igualando el momento de primer orden de la masa resultante del hemisferio con el momento de primer orden dado por la ecuación (1.5), tenemos:

$$\frac{K_1\pi}{4} Z_G\hat{k} = \frac{2K_1\pi}{15} r^5\hat{k} \quad (6)$$

Igualando las magnitudes de los vectores dados por (6) y simplificando:

$$Z_G = 8/15r$$

Centroides

El centro de gravedad y el centro de masa se relacionan directamente con los sistemas de partículas y los cuerpos físicos que en la práctica tienen peso. El término centroide está relacionado con las figuras geométricas (líneas, áreas y volúmenes). No poseen peso, y, por lo tanto, no pueden tener centro de gravedad. Sin embargo, podemos imaginar que cada elemento de una línea, elemento de área y de volumen corresponde un peso numéricamente proporcional a la longitud, área o volumen correspondiente. Esta circunstancia genera un sistema de fuerzas imaginarias que da origen a un "falso centro de gravedad" y como tal, lo llamaremos centroide también llamado baricentro. Así podemos hablar del centroide de una línea, de un área o de un volumen. Consideremos que el cálculo para su ubicación es innecesario, por las demostraciones realizadas para el cálculo de las coordenadas del centro de gravedad.

Las coordenadas del centroide en general se obtienen, a través de las ecuaciones:

1. Para una línea-

$$X_C = \frac{\int_L xdl}{L}, \quad Y_C = \frac{\int_L ydl}{L}$$

En donde,

$\frac{\int_L xdl}{L}$, $\frac{\int_L ydl}{L}$: Son los momentos de primer orden de la línea.

2. Para un área:

$$X_C = \frac{\int_A x dA}{A}, \quad Y_C = \frac{\int_A y dA}{A}$$

En donde,

$\frac{\int_A x dA}{A}$, $Y_C = \frac{\int_A y dA}{A}$: Son los momentos de primer orden del área

3. Para un volumen.

$$X_C = \frac{\int_A x dV}{V}, Y_C = \frac{\int_A y dV}{V}, Z_C = \frac{\int_A z dV}{V}$$

En donde,

- x_c, y_c, z_c son las coordenadas del centroide de una línea, de un área o un volumen, y $\frac{\int_A x dV}{V}$, $Y_C = \frac{\int_A y dV}{V}$, $Z_C = \frac{\int_A z dV}{V}$ constituyen los momentos de primer orden del volumen.

Es conveniente tener en cuenta, que el momento de una fuerza con respecto a un punto cualquiera del espacio, es una cantidad vectorial que se obtiene al hacer el producto vectorial del vector de posición de un punto cualquiera de la recta de acción por la fuerza. Sin embargo, el momento de un área, por ejemplo, con respecto a un punto cualquiera del plano es también un vector que es igual al producto de la magnitud del área por el vector de posición del centroide del área.

Propiedades del centroide de un área

1. Si un área tiene un eje de simetría, entonces su centroide se encuentra en dicho eje.
2. Sí un área tiene dos ejes de simetría, el centroide del área es el punto de intersección de los dos ejes.

Problema ilustrativo 1

Encontrar las coordenadas del centroide del triángulo rectángulo de las figuras 1.10 y 1.11.

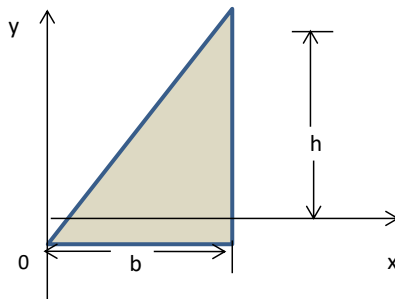


Figura.1.10. Dimensiones del triángulo rectángulo
 Fuente: Mecánica. Ferdinand Beer and E. Russel Johnston.2010

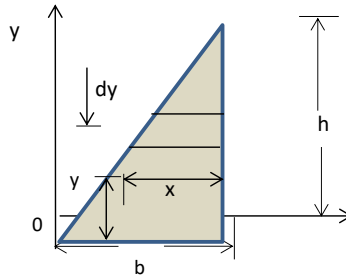


Figura.1.11. Centroide del triángulo rectángulo

Fuente: Mecánica. Ferdinand Beer and E. Russel Johnston.2010

Solución:

Consideremos un elemento diferencial de área dA , tal y como se muestra en la figura siguiente, Si x expresa el ancho del elemento diferencial de área. Entonces:

$$dA = xdy$$

Pero,

$$Y_C = \frac{\int_A y dA}{A} = \frac{\int_0^h xy dy}{\frac{1}{2}bh}$$

Pero, $x = \frac{b}{h} (h - y)$ (semejanza de triángulos)

$$\therefore \frac{2 \int_0^h \frac{b}{h} (h - y) y dy}{bh} = \left[\frac{2hy^2}{h^2} \right]_0^h - \left[\frac{2y^3}{3} \right]_0^h$$

$$\Rightarrow Y_c = \frac{h}{3}$$

Para calcular la abscisa del centroide, vamos a considerar el elemento de área, tal y como se muestra en la figura 1.12 siguiente.

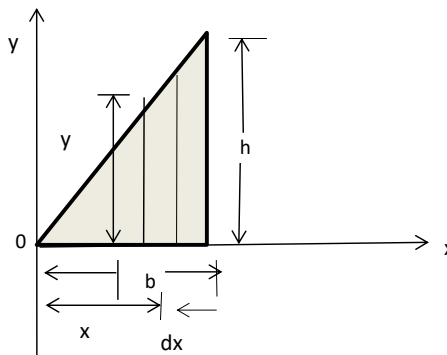


Figura.1.12 Elemento de área del triángulo rectángulo

Fuente: Mecánica. Ferdinand Beer and E. Russel Johnston. 2010

$$X_C = \frac{\int_A x dA}{A} = \frac{\int_0^h xy dy}{\frac{1}{2} bh}$$

Pero,

$$y = \frac{b}{h} x \quad (\text{semejanza de triangulo})$$

$$X_C = \frac{2 \int_0^h \frac{b}{h} x dx}{bh} = \left[\frac{2x^2}{b^2 3} \right]_0^h$$

$$\Rightarrow X_C = \frac{2}{3} b$$

Problema ilustrativo 2

Calcule la coordenada Y del centroide del triángulo generalizado definido por las figuras.1.13 y 1.14

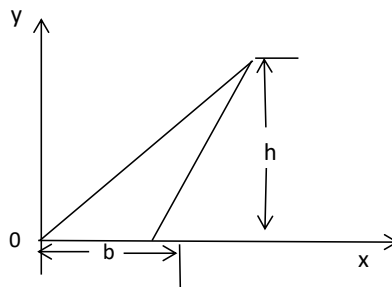


Figura.1.13. Centroide del triángulo problema 2

Fuente: Mecánica. Ferdinand Beer and E. Russel Johnston.2010

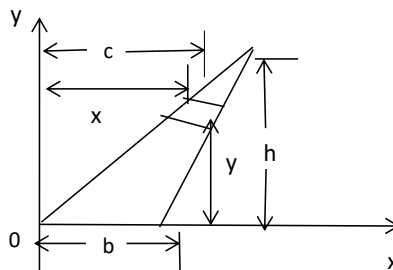


Figura.1.14. Coordenada Y del centroide de un triángulo

Fuente: Mecánica. Ferdinand Beer and E. Russel Johnston.2010

Solución:

Consideremos un diferencial de área dA cuyo centroide está determinado por las coordenadas x y y , como se muestra en la figura.

El momento de primer orden diferencial de área de dA , respecto del punto O, viene dado por,

$$\vec{M}_o = \vec{r}dA \quad (1)$$

Pero,

$$dA = b_1 dy \quad (2)$$

$$b_1 = \frac{b(h-y)}{h} \quad (\text{por semejanza de } \Delta s) \quad (3)$$

$$\therefore d\vec{M}_o = \vec{r} \left(\frac{b(h-y)}{h} \right) dy \quad (4)$$

Expresando a \vec{M}_o en función de sus componentes rectangulares e integrando tenemos,

$$\vec{M}_o = \int_0^h x \left(\frac{b(h-y)}{h} \right) \hat{i} dy + \int_0^h y \left(\frac{b(h-y)}{h} \right) \hat{j} dy \quad (5)$$

Igualando la ecuación de momentos dados por la ecuación (1.5) con el momento de toda el área respecto del punto O,

$$(X_c \hat{i} + Y_c \hat{j}) \frac{bh}{2} = \hat{i} \int_0^h x \left(\frac{b(h-y)}{h} \right) dy + \hat{j} \int_0^h y \left(\frac{b(h-y)}{h} \right) dy \quad (6)$$

Igualando las magnitudes de las componentes en \hat{j} de los vectores dados por (6), tenemos que,

$$Y_c \frac{bh}{2} = \hat{j} \int_0^h x \left(\frac{by(h-y)}{h} \right) dy = \frac{by^2}{2} \Big|_0^h - \frac{by^3}{3h} \Big|_0^h$$

$$Y_c = \frac{h}{3}$$

Problema ilustrativo 3

Hallar las coordenadas el centroide de la superficie plana de un cuadrante de círculo, los ejes x y y se muestran en la figura 1.15,

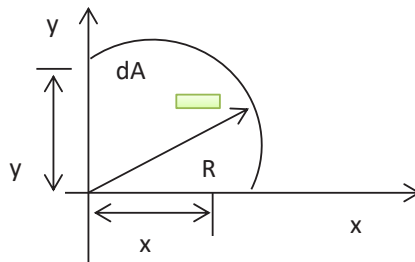


Figura.1.15. Coordenadas del centroide de una superficie plana
Fuente: Mecánica. Ferdinand Beer and E. Russel Johnston.2010

Vamos a considerar que el área dividida en elementos diferenciales de área, de lado dx y dy , o sea,

$$dA = dx dy \quad y \quad A = \int_A dA = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} x dx dy = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

$$A = \frac{\pi R^2}{4}$$

El momento diferencial de área dA respecto del punto O, está dado por,

$$d\vec{M}_o = (x \hat{i} + y \hat{j}) dA$$

Y el momento de cada uno de los elementos diferenciales respecto de O, viene dado por,

$$\vec{M}_o = \int_A d\vec{M}_o = \hat{i} \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} x dx dy + \hat{j} \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} y dx dy \quad (2)$$

$$\therefore \vec{M}_o = \hat{i} \int_0^R x \sqrt{R^2 - x^2} dx + \hat{j} \int_0^R \frac{(R^2 - x^2)}{2} dx$$

$$\therefore \vec{M}_o = \hat{i} \left[\frac{1}{3} R^3 \right] + \hat{j} \left[\frac{R^3 R^3}{2 \cdot 6} \right]$$

Igualando el momento de área resultante respecto de O con el momento de cada uno de los diferenciales de área,

$$(X_C \hat{i} + Y_C \hat{j}) \frac{\pi R^2}{4} = \hat{i} \left[\frac{R^3}{3} \right] + \hat{j} \left[\frac{R^3}{3} \right] \quad (3)$$

Igualando las componentes de los vectores dados por la ecuación (3)

$$\hat{i}: X_C \frac{\pi R^2}{4} = \left[\frac{R^3}{3} \right] \Rightarrow X_C = \frac{4R}{3\pi}$$

$$\hat{j}: Y_C \frac{\pi R^2}{4} = \left[\frac{R^3}{3} \right] \Rightarrow Y_C = \frac{4R}{3\pi}$$

Problema ilustrativo 4

Hallar las coordenadas del centroide del cuadrante de un arco, tal y como se muestra en la figura 1.16.

Solución:

Consideremos un diferencial de longitud de arco dL , el cual subtende el ángulo θ

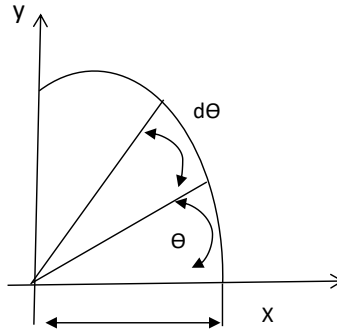


Figura.1.16. Centroide del cuadrante de un arco

Fuente: Mecánica. Ferdinand Beer and E. Russel Johnston.2010

$$d\theta = \frac{dL}{R} \text{ rad} \Rightarrow dL = R d\theta \quad L = \int dL = \frac{\pi R}{R} \quad (1)$$

El momento diferencial de longitud dL respecto del punto O está dado por,

$$d\vec{M}_0 = \vec{R}dL = (R\cos \theta \hat{i} + r \text{ sen } \theta \hat{j}) dL \quad (2)$$

Reemplazando (1) en (2) e integrando se tiene, espacio como

$$\vec{M}_0 = \hat{i} \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta + \hat{j} \int_0^{\pi/2} \text{sen } \theta d\theta = \hat{i} R^2 + \hat{j} R^2 \quad (3)$$

Si igualamos el momento dado por la ecuación (3) con el momento de toda la longitud respecto del punto O.

$$(X_C \hat{i} + Y_C \hat{j}) \frac{\pi R}{2} = \hat{i} R^2 + \hat{j} R^2 \quad (4)$$

Igualando las componentes de la ecuación (4) tenemos.

$$\hat{i}: X_C \frac{\pi R}{2} = R^2 \Rightarrow X_C = \frac{2R}{\pi}$$

$$\hat{j}: Y_C \frac{\pi R}{2} = R^2 \Rightarrow Y_C = \frac{2R}{\pi}$$

Centroides y centro de gravedad de figuras y cuerpos compuestos

Hasta aquí, hemos aprendido a localizar el centroide y el centro de gravedad de cualquier figura o cuerpo simple. Sin embargo, en la práctica nos encontramos con figuras y cuerpos compuestos. Llamaremos figura compuesta a toda aquella figura que esté formada por un número finito de figuras cuyos Centroides tengas disposiciones conocidas. Un área, por ejemplo, puede dividirse en dos o más áreas simple, tales como rectángulos, triángulos, círculos u otras formas cuyas áreas y coordenadas de su Centroide se obtienen fácilmente. En forma semejante, podemos definir también a los cuerpos compuestos.

Centroides de figuras compuestas

Una región compleja está compuesta por otras más simples, por ejemplo, un área. El área total es igual a la suma de las áreas que comprenden la región, eje o plano, es igual a la suma algebraica de los momentos de primer orden de las regiones parciales. El centroide de la región se calcula por medio de la ecuación,

$$\vec{r}_c = \frac{\vec{M}_O^R}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{r}_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

Donde la suma se realiza sobre todas las partes que componen la región. Esta ecuación vectorial se puede expresar en función de sus componentes rectangulares, así:

$$X_C = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}; \quad Y_C = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (a)$$

En donde,

a) X_i, y_i, z_i : son las coordenadas del centroide de las líneas, áreas, volúmenes o cuerpos que componen la región.

Centro de gravedad de un cuerpo compuesto

Las coordenadas X_G, Y_G, Z_G del centro de gravedad de un cuerpo compuesto, están dadas por las ecuaciones,

$$X_C = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i v_i \rho_i}{\sum_{i=1}^n v_i \rho_i}; \quad Y_C = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i v_i \rho_i}{\sum_{i=1}^n v_i \rho_i}; \quad Z_C = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{z}_i v_i \rho_i}{\sum_{i=1}^n v_i \rho_i} \quad (b)$$

En donde,

- x_i, y_i, z_i son las coordenadas del centro de gravedad de los cuerpos que componen la región.
- v_i : es el volumen de los cuerpos que componen la región.
- ρ_i : peso específico de cada cuerpo componente de la región.

Si el peso específico de cada uno de los cuerpos que componen la región es el mismo, entonces las ecuaciones (b) pueden reducirse a,

$$X_C = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i v_i}{V}; \quad Y_C = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i v_i}{V}; \quad Z_C = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{z}_i v_i}{V} \quad (c)$$

En donde,

- V : es el volumen total de la región.

Este método aplicado tanto para la determinación de los Centroides y - del centro de gravedad de figuras y cuerpos compuestos, evita la integración,

siempre y cuando se conozcan la longitud, áreas, volúmenes y localización del centroide o centro de gravedad de cada parte que compone la región y aplicable como ya hemos dicho, a líneas, áreas, volúmenes, pesos y masas.

Problema ilustrativo 1

Determine la localización del centroide de área que se muestra en la figura 1.17

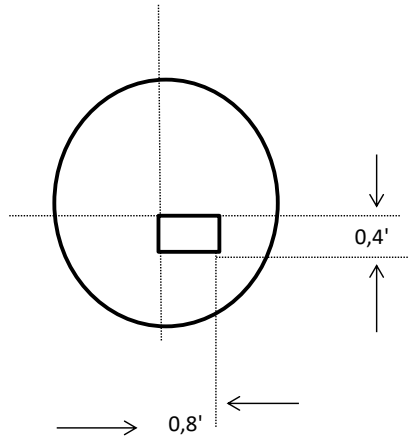


Figura.1.17. Localización del centroide de área
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Solución:

Tabla 3. Resumen localización del centroide de áreas

	área	X_i	Y_i	$A_i X_i$	$A_i Y_i$
○	12.5663	0.0	0.0	0.0	0.0
□	-0.32	0.4	-0.2	-0.128	-0.064
Σ	12.2463			-0.128	0.064

Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

$$X_C = \frac{\sum_{i=1}^n A_i X_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{-0.128}{12.2463} = 0.01045 \text{ ft (Hacia la izquierda del centro)}$$

$$Y_C = \frac{\sum_{i=1}^n A_i Y_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{0.064}{12.2463} = 0.00523 \text{ ft (Hacia arriba del centro)}$$

Problema ilustrativo 2

Determine la localización del centroide de la superficie formada por dos figuras como se muestra en la figura 1.18 y se sintetiza en la tabla 4.

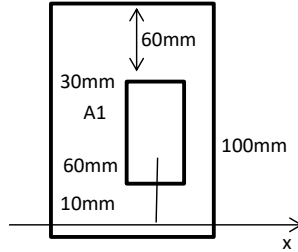


Figura.1.18. Localización del centroide de la superficie de dos figuras
 Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Solución:

Tabla 4. Localización del centroide de la superficie de dos figuras

	área	X_i	Y_i	$A_i X_i$	$A_i Y_i$
A1	10000	50	50	500000	500000
A2	-2400	70	40	-168000	-96000
Σ	7600			-332000	404000

Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

$$X_C = \frac{\sum_{i=1}^n A_i X_i}{\sum A_i} = \frac{32000}{7600} = 43.69mm$$

$$Y_C = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{404000}{7600} = 53.16mm <$$

Problema ilustrativo 3

Localice el centroide del área definida en la figura 1.19 y la tabla 5.

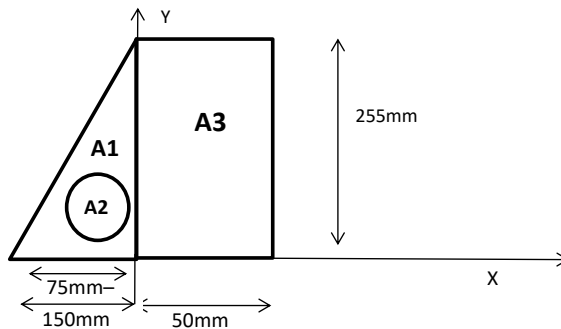


Figura 1.19. Centroides del área de una figura
 Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Solución:

Tabla 5. Centroide del área de una figura compuesta

	área	X _i	Y _i	A _i X _i	A _i Y _i
A2	16875	-50	75	- 843750	1265625
A3	-4415.63	-37.50	3750	165586.13	-165586.13
A4	11250	25	112.50	281250	1265625
Σ	23709.37			-396913.87	2365663.87

Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

$$X_C = \frac{-396913.87 \text{ mm}^3}{23709.37 \text{ mm}^2} = 16.7 \text{ mm}$$

$$Y_C = \frac{2365663.87 \text{ mm}^3}{23709.3 \text{ mm}^2} = 99.8 \text{ mm}$$

Por lo tanto, el centroide expresado vectorialmente será:

$$\vec{r}_C = -16.7(\text{mm})\hat{i} + 99.8(\text{mm})\hat{j}$$

Problema ilustrativo 4

Hallar el centroide de la figura 1.20, si se dan las dimensiones:

$$L_1 = 60 \text{ mm} \quad L_4 = 20 \text{ mm}$$

$$L_2 = 80 \text{ mm} \quad L_5 = 30 \text{ mm}$$

$$L_3 = 30 \text{ mm} \quad L_6 = 100 \text{ mm}$$

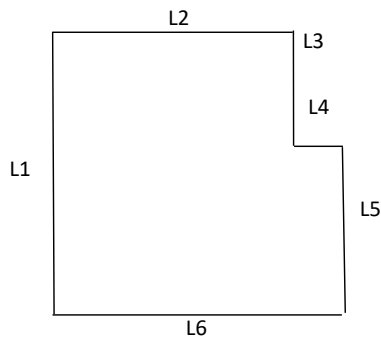


Figura.1.20. Centroide de una figura irregular

Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Solución:

Se elige un sistema de Coordenadas, de tal forma que el eje de las abscisas coincida con L₆ y el eje de las ordenadas con L₁, ver la ilustración en la figura 1.21 y la tabla 6.

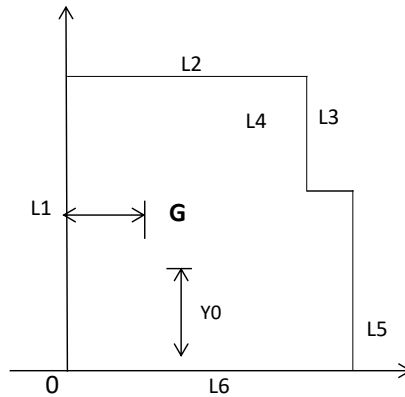


Figura.1.21. Ilustración del centroide figura irregular

Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Tabla 6. Centroide del área de una figura irregular.

	Longitud	X _i	Y _i	A _i X _i	A _i Y _i
L1	60	0	30	0	1800
L2	80	40	60	3200	4800
L3	30	80	45	2400	1350
L4	20	90	30	1800	600
L5	30	100	15	3000	450
L6	100	50	0	5000	0
Σ	320			15400	9000

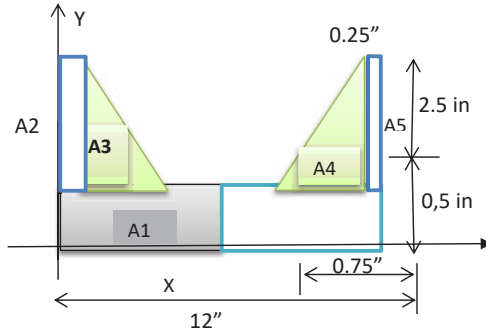
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

$$X_C = \frac{\sum_{i=1}^6 L_i X_i}{\sum L_i} = \frac{15400}{320} = 48.13mm$$

$$Y_C = \frac{\sum_{i=1}^6 L_i Y_i}{\sum L_i} = \frac{9000}{320} = 28.13m$$

Problema ilustrativo 5

Hallar el centroide de la figura 1.22.



Fuente: Mecánica. Ferdinand Beer and E. Russel Johnston.2010
Figura.1.22 Centroides del área problema ilustrativo

Solución:

Tabla 7. Centroides del área problema ilustrativo 5

	Área	X_i	Y_i	$A_i X_i$	$A_i Y_i$
A1	6	6	0.25	36	1.5
A2	0.625	0.12	1.75	0.078	1.09
A3	0.625	0.42	1.33	0.2625	0.83
A4	0.625	11.58	1.33	7.24	0.83
A5	0.625	11.58	1.75	7.43	1.09
Σ	8.5			51	5.34

Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019

$$X_C = \frac{51}{8.5} = 6 \text{ in}$$

$$Y_C = \frac{5.34}{8.5} = 0.63 \text{ in}$$

CAPÍTULO II

Equilibrio de un cuerpo rígido

Se define un cuerpo rígido como un sistema material continuo en el cual las distancias entre dos cualquiera de sus partículas se mantienen constantes. Este es, un modelo idealizado que es de gran utilidad en el estudio de la estática y de la dinámica.

En este capítulo se estudiarán los conceptos fundamentales para el equilibrio de un cuerpo rígido. Aquí además de demostrar que para que se satisfaga tal condición se necesita, del equilibrio del sistema de fuerza que actúe sobre el cuerpo, con el fin de impedir los movimientos de traslación y rotación del mismo.

Aunque los cuerpos rígidos son tridimensionales muchos problemas de ingeniería se pueden analizar con las fuerzas que actúan sobre el cuerpo proyectado sobre un mismo plano. Esta circunstancia obligó a que primeramente se trate en este capítulo el equilibrio de un cuerpo sometido a la acción de un sistema de fuerza externa que sean "coplanares". Posteriormente se analizará el equilibrio del cuerpo rígido bajo la acción de un sistema de fuerza en el espacio. Por la frecuente complejidad geométrica, de los cuerpos, la solución tridimensional de los problemas se abordará a través del álgebra vectorial.

Condición necesaria para el equilibrio de un cuerpo rígido

Para cumplir con este objetivo, consideremos un cuerpo rígido en equilibrio sobre el cual actúa un sistema de fuerzas externas: el cuerpo se encuentra referido al sistema inercial OXYZ como se muestra en la figura 2.1 (a).

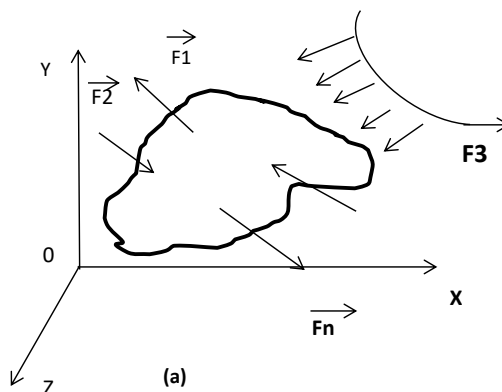


Figura.2.1 (a). Cuerpo rígido en equilibrio
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

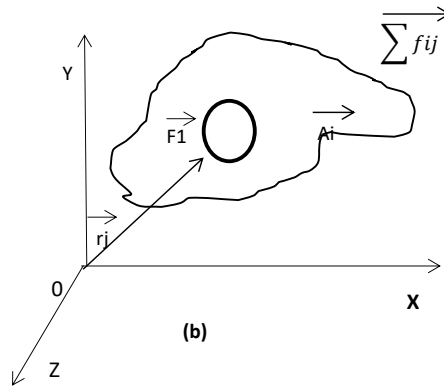


Figura.2.1 (b). Condiciones para el equilibrio de un cuerpo
 Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Con el propósito de estudiar las condiciones necesarias para el equilibrio de un cuerpo rígido, imaginemos una partícula genérica A_i de este, con un vector de posición \vec{r}_i respecto del origen O de la referencia, ver la figura 2.1 (b). La primera ley de Newton enuncia en forma explícita las condiciones necesarias para su equilibrio estático y dinámico; establece que una partícula permanecerá en equilibrio sí y solo si la resultante de todas las fuerzas que actúa sobre ella, es nula. Apoyados en este hecho, por extensión deduciremos luego las condiciones necesarias para mantener el equilibrio de un cuerpo rígido.

En general, sobre la partícula arbitraria A_i actúan dos tipos de fuerzas: internas y externas. Las internas \vec{f}_{ij} se generan por la interacción entre las diferentes partículas que conforman al cuerpo ("todo atrae a todo; ley de la Gravitación Universal"); mientras que las fuerzas externas, son todas aquellas sollicitaciones que no son causadas a través de la interacción mutua, sino que son producidas por los efectos de otros cuerpos o partículas o también por fuerzas provenientes de campos: eléctricos; magnéticos, electromagnéticos, gravitacionales, etc. Llamado $\sum_{j=1} \vec{f}_{ij}$ y \vec{F}_i respectivamente a las resultantes

de la fuerza internas y externas que actúan sobre la partícula genérica A_i , tal como puede apreciarse en la figura 2.1(c). Aplicando la primera ley de Newton para conservar el equilibrio se requiere que

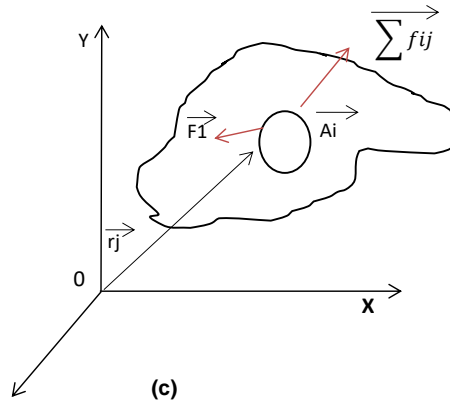


Figura. 2.1 (c). Resultante de las fuerzas internas y externas de un cuerpo

Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

$$\sum_{j=1} \vec{f}_{ij} \text{ y } \vec{F}_i = \vec{\theta} \quad (2.1)$$

Nótese que la sumatoria $\sum_{j=1} \vec{f}_{ij}$ no tiene sentido para $J = i$, debido a que la partícula A_i no puede atraerse ella misma.

Particularizando la ecuación vectorial (2.1) para cada una de las partículas del cuerpo rígido y sumando miembro a miembro las infinitas expresiones resultantes, se obtiene:

$$\sum \left(\sum_{j=i} \vec{f}_{ij} \right) + \sum \vec{F}_i = \vec{\theta} \quad (2.2)$$

Pero a través de la tercera ley de Newton acción-reacción se puede demostrar que la sumatoria $\sum \left(\sum_{j=i} \vec{f}_{ij} \right)$ es nula, ya que en virtud de esta ley se tiene para cada par de partículas A_i y A_j del cuerpo existen dos fuerzas interiores reciprocas \vec{f}_{ij} y \vec{f}_{ji} que son de igual magnitud, misma pero de sentidos contrarios y por consiguiente, su suma es equivalente al vector nulo. Siendo así, la ecuación (2.2) haciendo $\sum \vec{F}_i = \sum \vec{F}$ se reduce a.

$$\sum \vec{F} = \vec{\theta} \quad (2.3)$$

La expresión (2.3) constituye la primera condición necesaria para el equilibrio del cuerpo, la cual establece que la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo debe estar en equilibrio.

Ahora bien, si pre multiplicamos vectorialmente la ecuación (2.1) por el vector de posición \vec{r}_i de la partícula arbitrariamente seleccionada A_i , obtendremos el momento de las fuerzas que actúan sobre A_i respecto del origen o del sistema inercial y que denotaremos por $\vec{M}_0^{A_i}$, ver la figura 2.2.

Por lo que se puede escribir aplicando la propiedad distributiva del producto vectorial:

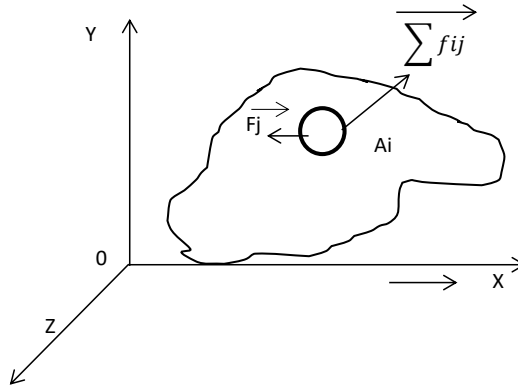


Figura.2.2 Momento de las fuerzas actuantes sobre un cuerpo
 Fuente: Mecánica. Ferdinand Beer and E. Russel Johnston.2010

$$\vec{M}_0^{A_i} = \vec{r}_i \times \left(\sum_{j=1} \vec{f}_{ij} + \vec{F}_i \right) = \vec{r}_i \times \sum_{j=1} \vec{f}_{ij} + \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{\theta} \quad (2.4)$$

$$\vec{M}_0^{A_i} = \vec{r}_i \times \left(\sum_{j=1} \vec{f}_{ij} + \vec{F}_i \right) = \vec{r}_i \times \sum_{j=1} \vec{f}_{ij} + \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{\theta}$$

Aplicando la ecuación vectorial (2.4) a cada una de las infinitas partículas que forman el cuerpo, ver figura 2.3, y sumando luego miembro a miembro las ecuaciones obtenidas, queda:

$$\vec{M}_0^{A_1} = \vec{r}_i \times \sum_{j=2} \vec{f}_{1j} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \vec{\theta}$$

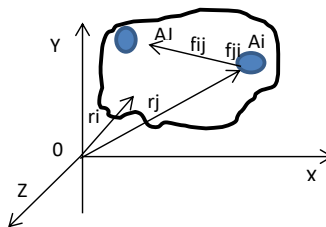


Figura.2.3 Momento de fuerzas actuantes en infinitas partículas de un cuerpo
 Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

- Las ecuaciones escalares (2.9) son "necesarias y suficientes" para mantener el equilibrio estático del cuerpo rígido o indeformable.
- Si el cuerpo es deformable las expresiones (2.8) "son necesarias, pero no suficientes".

Equilibrio en el plano

Si el sistema de fuerzas que actúa sobre el cuerpo rígido es coplanar, por ejemplo, si se encuentra en el plano XY las ecuaciones escalares (2.9) se reducen a tres, así:

$$\sum F_x = 0 ; \quad \sum F_y = 0$$

$\sum M_o = 0$ Las ecuaciones (2.9) solo se satisfacen si el punto o está contenido en el plano XY de las fuerzas.

Vínculos

Los cuerpos rígidos en "equilibrio estático" están obligados a no moverse libremente en el espacio y consecuentemente en el plano. Tales limitaciones al libre movimiento se realizan a través de vínculos que unen al cuerpo a otro sistema material que igualmente se encuentra en reposo.

Los vínculos se clasifican en general, como: "vínculos internos", "vínculos externos". Los primeros limitan la libertad de movimiento de un cuerpo respecto a otro; mientras que los del segundo tipo impiden el libre movimiento del cuerpo respecto a tierra.

Vínculos internos

Como ya se dijo estos limitan la capacidad de movimiento relativo entre dos cuerpos. Estos a su vez pueden clasificar teniendo en cuenta el número de movimientos que impiden, así:

- a) vínculos de primera especie.
- b) Segunda especie.
- c) Tercera especie.

Los cuales restringen respectivamente 1,2 y 3 movimientos o grados de libertad. Para una mejor ilustración mostremos los siguientes ejemplos:

Vínculo interno de primera especie

El rodillo interno impide la traslación relativa de los cuerpos en la dirección del eje de las X, mientras que, si permite la traslación relativa en la dirección del eje y además acepta la rotación Vínculo relativa, observar la figura 2.4.

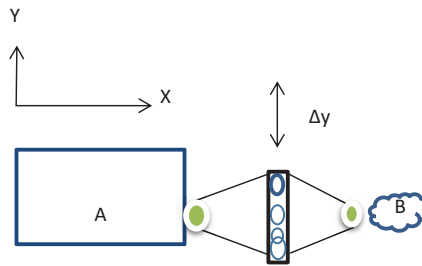


Figura.2.4 vínculo interno de primera especie
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Vínculo interno de segunda especie

Llamado comúnmente "articulación interna" o rotación. Impide los desplazamientos relativos de las láminas y D en las direcciones X y Y. Permite la rotación relativa, ver la figura 2.5.

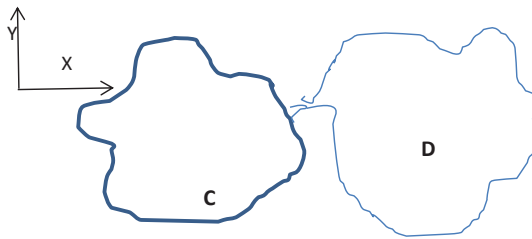


Figura.2.5 vínculo interno de segunda especie
Fuente: Pinto. Gómez. Ariza.2019.

Vínculo interno de tercera especie

Se llama "empotramiento interno" o "junta rígida". Impide dos desplazamientos y la rotación relativos. Impedido todo movimiento y, por lo tanto, las láminas E y F pueden considerarse como una sola, ver la figura 2.6.



Figura 2.6. vínculo interno de tercera especie
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Vínculos externos

Impide el libre movimiento de un cuerpo con respecto a la tierra. Las columnas, los postes del alumbrado están unidos al suelo a través de vínculos externos.

La clasificación de este tipo de vínculos es similar a la de los vínculos internos con la diferencia que la tierra en todos los casos se considerará como un cuerpo en reposo, así se pueden distinguir las siguientes tres clases:

- Primera especie. El cuerpo tiene impedido un movimiento.
- Segunda especie. Al cuerpo se le restringen dos movimientos.
- Tercera especie. El cuerpo tiene restringido tres movimientos.

Vínculo de primera especie

Se conoce con el nombre de "rodillo" o "articulación móvil". Restringe el desplazamiento en la dirección del eje Y. Permite desplazamiento en la dirección del eje X y rotación alrededor del punto O, ver figura 2.7.

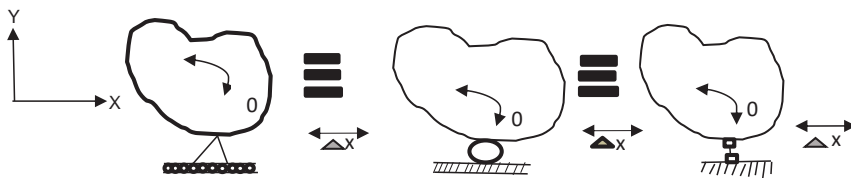


Figura.2.7 Vínculo externo de primera especie

Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Vínculo de segunda especie

La figura 2.8, muestra un vínculo de segunda especie, llamado también "articulación" o "Articulación fija o plana". Impide dos desplazamientos en las direcciones X y Y. Permite la rotación del cuerpo alrededor del punto O

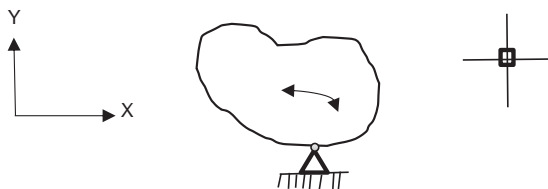


Figura.2.8 Vínculo externo de segunda especie

Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

La figura 2.9, muestra un Vínculo de segunda especie, el cual recibe el nombre de "empotramiento móvil". Este restringe una traslación y la rotación y permite el desplazamiento en una dirección.

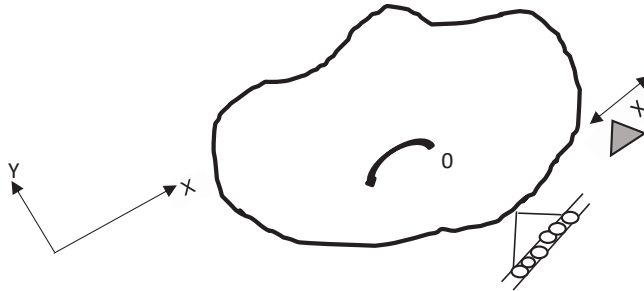


Figura.2.9 Vínculo externo de segunda especie
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Vínculo de tercera especie

Se le conoce como "empotramiento". Restringe tres movimientos, impide todo movimiento en el plano, ver la figura 2.10.

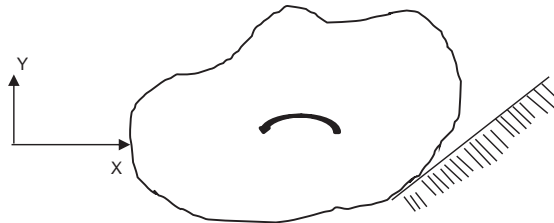


Figura.2.10 Vínculo externo de tercera especie
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Vínculo y sus reacciones

La resistencia que ofrecen los vínculos para contrarrestar las acciones de los cuerpos sobre ellos, reciben el nombre de "reacciones". Por lo tanto, los efectos de los vínculos o apoyos pueden ser reemplazados por las respectivas reacciones que estos transmiten al cuerpo. La determinación de las reacciones en los vínculos de los cuerpos constituye uno de los campos de aplicación, más importantes de la estática. Los vínculos y sus reacciones no existen simultáneamente, o sea una vez que los sustituyamos por su reacción o reacciones inmediatamente estos desaparecen.

En general, un cuerpo rígido en "equilibrio estático" está sometido a dos tipos de fuerzas externas que son: a) las fuerzas aplicadas y b) las reacciones de los

vínculos externos. Nótese que las fuerzas internas que actúan sobre el cuerpo no representan, ya que estas fuerzas participan en parejas colineales de igual magnitud, pero de sentidos opuestos y, por consiguiente, su efecto neto es nulo.

Hipótesis para el cálculo de las reacciones de los vínculos

1. si un vínculo impide la traslación de un cuerpo en una dirección determinada, entonces se produce una fuerza reactiva o simplemente reacción en esa dirección.
2. Cuando un vínculo evita el giro de un cuerpo se genera una reacción llamada movimiento en el sentido contrario a la sollicitación.
3. La fricción del vínculo y sus elementos con el cuerpo es nula. Es el caso de los pasadores y agujeros.
4. Como consecuencia de la hipótesis anterior, los esfuerzos producidos en la zona de contacto de pasadores y agujeros son perpendiculares a la superficie de contacto y están orientados hacia el centro del pasador.

Reacciones de los vínculos sobre un cuerpo sometido a la acción de un sistema de Fuerza Coloidal

Las reacciones de los vínculos sobre un cuerpo sometido a la acción de un sistema de fuerza coloidal, pueden clasificarse en: Rodillo o articulación móvil, articulación y empotramiento. Los cuales se describirán a continuación.

Rodillo o articulación móvil

Produce una sola reacción la cual está dirigida en la dirección perpendicular a la superficie donde ruedan rodillos, ver la figura 2.11.

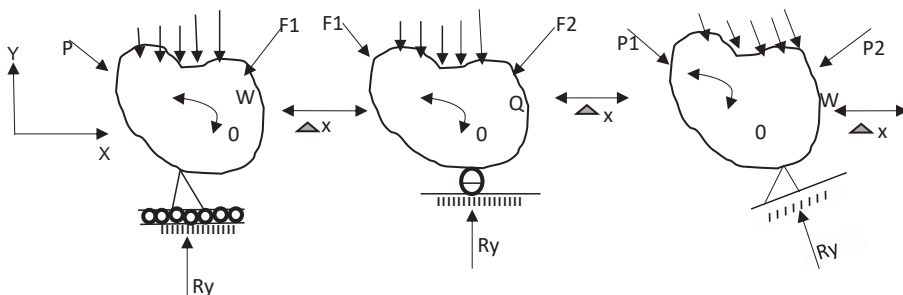


Figura.2.11 Vínculo externo de primera especie-Rodillo articulación móvil
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Articulación

Genera una reacción de dirección y magnitud desconocidas, que la podemos descomponer en componentes rectangulares, tales como R_x y R_y , ver la figura 2.12.

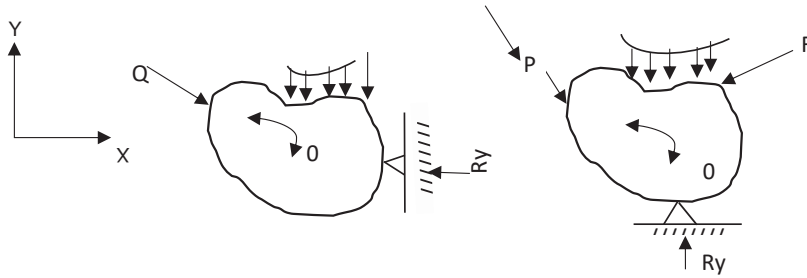


Figura.2.12 Vínculo externo de segunda especie-articulación

Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Empotramiento

Este tipo de vínculo produce tres reacciones en un punto conocido. Una fuerza de magnitud y dirección desconocida que se puede expresar en función de dos componentes rectangulares R_x y R_y y un momento M , como lo muestra la figura 2.13.

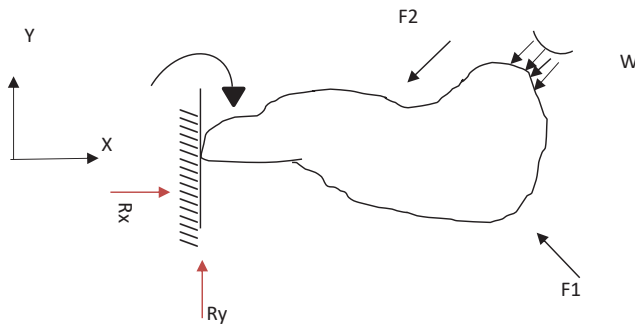


Figura.2.13 Vínculo externo de segunda especie-Empotramiento

Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Diagrama de cuerpo libre (DCL)

Es "un esquema" de uso frecuente en la estática y la dinámica, el cual hace muy valioso cuando se necesitan determinar fuerzas y pares desconocidos que actúan sobre un sistema material. El DCL, permite aislar o liberar una partícula, un cuerpo rígido o parte de este y hasta un sistema de cuerpos del

entorno o medio ambiente que lo rodea. En dicho croquis se muestran todas las fuerzas y pares externos que actúan sobre la parte separada, así como también las reacciones de todos los vínculos externos e internos, si fuese el caso como lo muestra la figura 2.14. Aplicando luego las condiciones de equilibrio a la parte liberada, se pueden determinar las reacciones de los vínculos o apoyo y las fuerzas o pares externos desconocidos, que actúan sobre la región separada.

El DCL es pues, un concepto bastante útil y constituye un modelo esencial de la mecánica clásica. Esta circunstancia, explica las ventajas que se obtienen al dibujarlo correctamente cuando se estudia la solución de un problema de equilibrio en estática o la de otro en dinámica. Nunca se insistirá lo suficiente, en la importancia de elaborar un DCL que sea, claro y didácticamente sencillo. La facilidad y sencillez con que puedan construirse los DCL los hace una herramienta valiosa para el cálculo de las reacciones sobre los cuerpos.

Para elaborar adecuadamente un "diagrama de cuerpo libre" se recomienda:

1. Elegir un sistema de coordenadas apropiado, de manera que permita expresar las fuerzas en función de sus componentes.
2. Identificar convenientemente la parte a liberar. Esta selección depende fundamentalmente de las incógnitas que se requieran calcular.
3. Dibujar el esquema correspondiente. Debe ser lo más sencillo y en el mismo deben acotarse las distancias y señalarse las pendientes de los elementos seleccionados.
4. Representar las fuerzas y pares externos si los hubiere, que actúen sobre la parte liberada.
5. Mostrar e identificar las reacciones de los vínculos, recordando siempre, que estos no existen simultáneamente (reacciones y vínculos).
6. Tener en cuenta que, una vez se elimina un vínculo interno para hacer el DCL de las partes, las fuerzas en ese punto de contacto entre los cuerpos satisfacen el axioma de la acción - reacción.

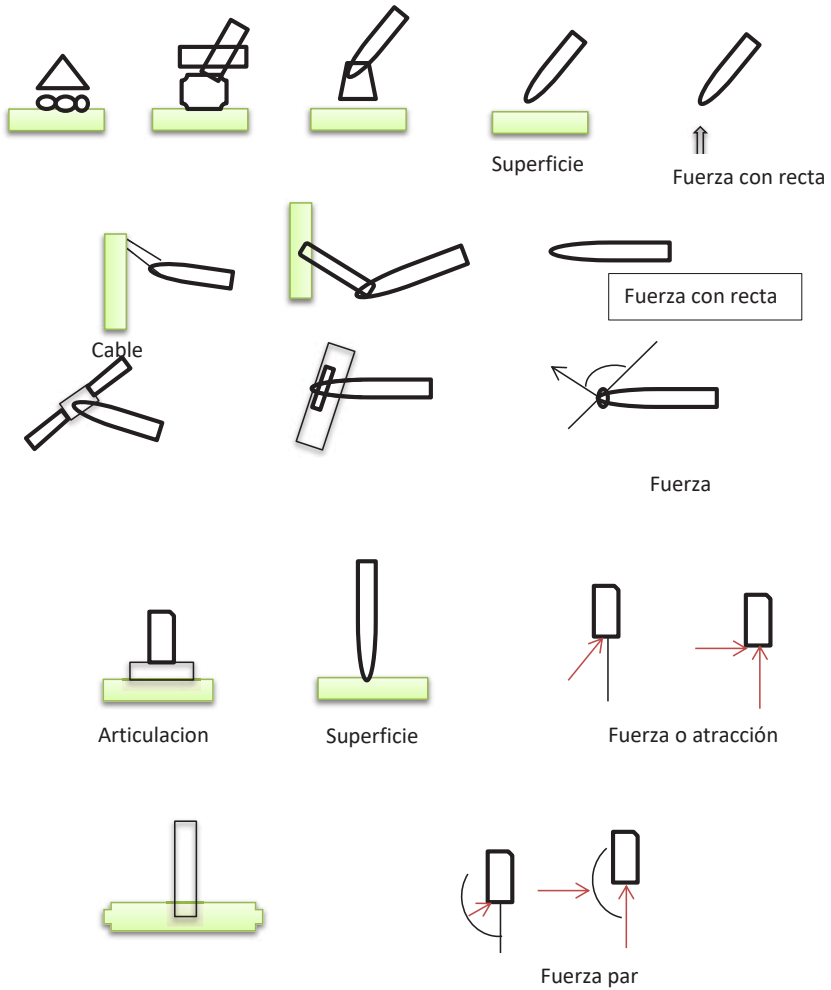


Figura 2.14 Vínculos y sus reacciones en dos dimensiones
Fuente: Mecánica. Ferdinand P. Beer and Johnstonl.2010

CAPÍTULO III

Estructuras: armaduras-bastidores

Una estructura es un ensamblado rígido compuesto por cuerpos prismáticos unidos mediante articulaciones o nodos a través de pasadores lisos (sin fricción) capaz de soportar grandes cargas externas. Si estas se comparan con el relativo bajo peso de la estructura. Las cargas que actúan sobre la estructura son transmitidas a tierra a través de sus soportes o apoyos. Las vinculaciones (puntos de unión), entre los distintos cuerpos que ensamblan la estructura reciben el nombre de nodos o nudos o juntas.

En la ingeniería estructural existe una extensa variedad de clases o tipos de estructuras las cuales requieren en general, de distintos métodos para su análisis estructural. Sin embargo, su marco teórico requiere fundamentalmente, de los conceptos que les provee la Estática, los cuales constituyen la base conceptual en que se apoya el análisis estructural. Por ello, siempre enfatizaremos este compromiso, para dar al estudiante una sólida base, que le permita abordar estudios más avanzados relacionados con el campo del análisis estructural. Sabemos que convencerlos de su conveniencia, es imperativo para poder realizar estudios detallados acerca de la teoría estructural, en todas sus formas, clases y métodos.

Sébase que tanto, las armaduras o cerchas como los bastidores o marcos, constituyen dos clases importantes de estructuras básicas, que son generalmente, ensambladas a partir de miembros o cuerpos estructurales (estructuras articuladas), pero el análisis estructural de uno u otro de los tipos, mantienen diferencias sustantivas, en cuanto a los métodos aplicados para resolverlos.

También, podemos diferenciar las dos clases que nos ocupan, si tenemos en cuenta, que las armaduras o cerchas están formadas por un conjunto de barras o elementos, diseñados y conectados de tal manera, que dan lugar, a la formación de una estructura, que es un ensamble que puede ser utilizado inclusive como una viga de carga de diferentes luces.

En una armadura, las barras forman generalmente, un cuerpo de triángulos que dan lugar a figuras geométricas que nos permiten crear armaduras estructuralmente estables en el plano. Dichas armaduras se caracterizan porque las cargas externas que actúan sobre ella, siempre deben estar aplicadas en los nodos o nudos de la cercha. En consecuencia, solo se generan en las barras fuerzas axiales de tracción o de compresión.

Hipótesis para el análisis de las armaduras

1. Los elementos o barras de una armadura están conectados entre sí, en sus nodos o nudos a través de pasadores lisos (sin fricción). Lo que permite, que los extremos de los miembros giren libremente.
2. Las dos fuerzas que actúan sobre cada una de las barras son siempre axiales.
3. Los miembros de una armadura son de peso despreciable, lo que equivale a decir, que $m = 0$.
4. Las fuerzas externas que actúan sobre una armadura están aplicadas siempre en los nodos.
5. En éste capítulo, desarrollaremos el estudio de las dos clases de estructuras particulares, que hemos abordado aquí, o sea, armaduras y bastidores.

Equilibrio

En el lenguaje de las estructuras, se dice en general, que un cuerpo en reposo se encuentra en equilibrio estático. Todo cuerpo rígido, localizado en el espacio tridimensional está en equilibrio estático, y el mismo satisface las siguientes seis expresiones matemáticas escalares:

$$\sum_{i=1}^n F_x + \rightarrow = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_y + \uparrow = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_z + \rightarrow = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_x + \cup = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_y + \cup = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_z + \cup = 0$$

Sin menoscabo de la calidad, y en beneficio de la economía de cálculo, se permite ejecutar el análisis y diseño, de la mayoría de las estructuras considerándolas como si estas se encontraran en un plano. Por ejemplo, el plano $\{xy\}$. Todo este proceso puede darse, sin afectar negativamente los resultados del análisis.

Entonces, para fines de análisis y diseño en el plano, las seis ecuaciones escalares pueden ser reducidas a tres, así:

$$\sum_{i=1}^n F_x + \rightarrow = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_y + \uparrow = 0 \quad y$$

$$\sum_{i=1}^n M_z + \cup = 0$$

Para la aplicación de los sistemas de fuerzas descritos arriba, se requiere de la frecuente aplicación de la Tercera Ley de Newton o Ley de Acción y Reacción. Esta aplicación se ejecuta para todos los cuerpos en reposo (equilibrio estático), en otras palabras, para cada fuerza actuante: acción, se obtiene una respuesta que se llama reacción, de igual magnitud, pero de sentido contrario. Pero siempre debe tenerse en cuenta, las condiciones para el equilibrio estático las clases de estructuras que estudiaremos en este capítulo (armaduras y bastidores) son planas.

Para poder identificar completamente una fuerza determinada, se hace necesario determinar las siguientes tres características esenciales:

{ *Magnitud*
Dirección y
Sentido

Estas tres características, son fácilmente identificables, para las fuerzas externas aplicadas a la estructura, pero no sucede lo mismo, con las reacciones de los apoyos o vínculos de las que siempre se conoce el punto de aplicación; y en algunos casos particulares, se puede llegar a conocer su dirección. Es por ello, que se hace necesario, descomponer cada reacción independientemente de su dirección en sus dos componentes: horizontal y vertical. Este proceso es conveniente para evitar el cálculo de la dirección de la reacción en cuestión; que no deja de ser una tarea muy complicada.

Si una estructura se encuentra en equilibrio estático. Entonces, cada una de sus partes integrantes también lo estará (o sea, si el todo está en equilibrio, entonces cada una de las partes también lo estará). Dicho de otro modo, si las ecuaciones de la Estática son aplicables a la estructura completa, también deben ser aplicables de igual modo, a todas y cada una de sus partes, sin importar que tan grande o pequeña sea la estructura primitiva.

De esta manera, es posible elaborar un diagrama de cuerpo libre (DCL) de cualquiera de las partes integrantes de la estructura original y evidentemente, se puede aplicar las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio estático de la parte de la estructura en consideración. El llamado DCL, que un dibujo o esquema debe contener son: todas las fuerzas externas aplicadas, las reacciones de los apoyos, así como, las fuerzas internas que se ejercen sobre los componentes de la estructura.

a) Armaduras o cerchas

Hasta aquí, hemos presentado los conceptos básicos de una armadura. Ahora para una mejor ilustración de una armadura empecemos mostrando el modelo

de armadura o cercha más sencillo que podemos presentar en el mundo real, como lo muestra la figura 3.1.

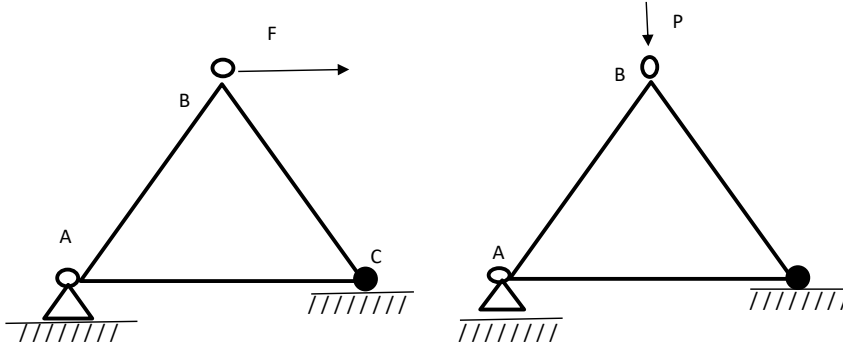


Figura 3.1 Modelo de armadura
 Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Método de los nodos

El método de los nodos para el análisis estructural de una armadura, se apoya en las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio estático, de todos y cada uno de los nodos de la armadura. Para ello, se requiere de la exacta elaboración del DCL del nodo; y de la buena aplicación de las dos ecuaciones escalares que establecen el equilibrio estático del nodo. Así:

$$\sum F_x + \rightarrow = 0 \quad \text{y} \quad \sum F_y + \uparrow = 0$$

Las dos ecuaciones arriba expresadas se aplican a cada nodo de la armadura; y de esta manera, se pueden determinar las fuerzas desconocidas que actúan sobre el nodo. Para ilustrar lo expresado anteriormente, observemos el esquema de la figura 3.2 que proponemos a continuación:

Diagrama de cuerpo libre (DCL) del nodo B:

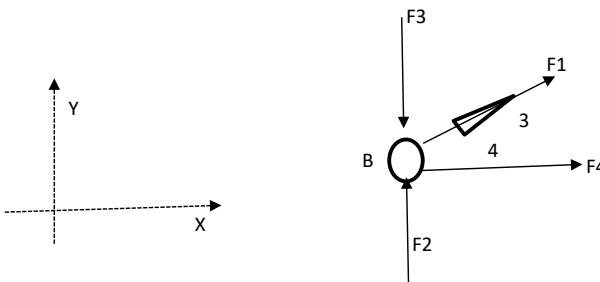


Figura.3.2 Fuerzas sobre el nodo de la armadura
 Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Condiciones para el equilibrio estático:

$$\sum F_x +\rightarrow = 0$$

$$F_{1x} + F_4 = 0$$

$$\sum F_y +\uparrow = 0$$

$$F_2 - F_3 + F_{1y} = 0$$

Al analizar las dos ecuaciones escalares anteriores, podemos evidenciar que para determinar la magnitud y sentido de cualquier fuerza (horizontales o verticales), que actúa sobre un nodo, no deben existir más de dos fuerzas desconocidas (fuerzas incógnitas) en el nodo, ya que solo se dispone de dos ecuaciones.

Para aplicar el método de los nodos, a una armadura determinada debe primeramente dibujarse el DCL del nodo respectivo; y así mismo, repetir el mismo procedimiento, para cada nodo de la armadura o cercha.

No obstante, es importante, tener presente, que una vez adquirida la experiencia en la aplicación del método el estudiante, podrá intuir los DCL de algunos nodos particulares; y visualizar con facilidad las magnitudes y los sentidos de las fuerzas horizontales y verticales que intervienen en el nodo. Lo clave en la aplicación del método, es que se debe resolver, nodo por nodo; sin considerar las fuerzas en los nodos vecinos. A manera de ilustración, considérese el siguiente ejemplo ilustrativo:

Problema Ilustrativo 1

Determinar la fuerza axial, sobre cada una de las barras de la figura 3.3, aplicando el método de los nodos

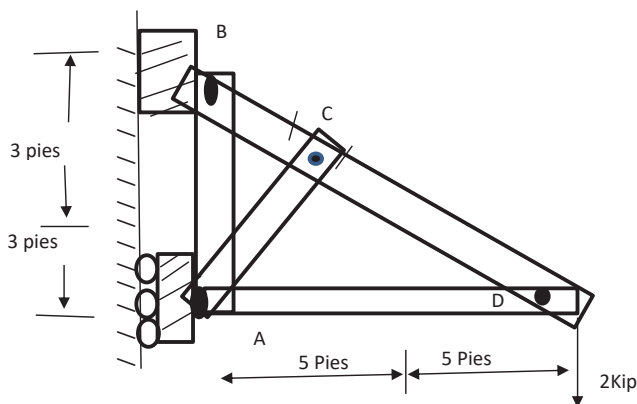


Figura.3.3 ilustración problema ilustrativo 1
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

La figura 3.4, muestra el DCL de Bastidor Completo:

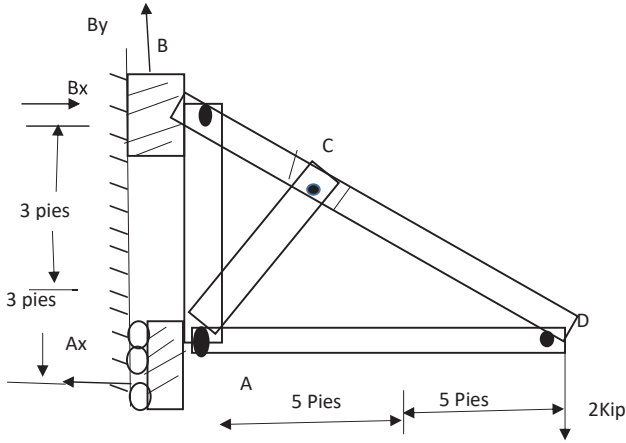


Figura.3.4 Diagrama de cuerpo libre problema ilustrativo 1
 Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Cálculo de las reacciones

$$\sum F_y + \uparrow = 0$$

$$B_y - 2 \text{ Kip} = 0$$

Por lo tanto,

$$B_y = 2 \text{ Kip} \quad \uparrow \tag{1}$$

$$\sum M_B + \circlearrowleft = 0$$

$$-6A_x - 10 \times 2 \text{ Kip} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 3.33 \text{ Kip} \quad \rightarrow \tag{2}$$

En consecuencia,

$$B_x = 3.33 \text{ Kip} \quad \leftarrow \tag{3}$$

El diagrama de cuerpo libre (DCL) Nodo D, se muestra en la figura 3.5:

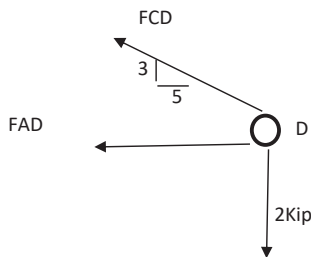


Figura. 3.5 Diagrama de cuerpo libre del nodo D
 Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

$$\sum F_y + \uparrow = 0$$

$$F_{CDy} - 2 \text{ Kip} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CDy} = 2 \text{ Kip} \quad (4)$$

Por semejanza entre el triángulo escalar de catetos 3 pies y 5 pies con el triángulo de fuerzas se puede escribir la siguiente relación:

$$\frac{F_{CD}}{\sqrt{34}} = \frac{F_{CDy}}{3} = \frac{2 \text{ Kip}}{3} \quad \Rightarrow \quad F_{CD} = \frac{2\sqrt{34}}{3} \quad (T) \quad (5)$$

También,

$$\frac{F_{CDx}}{5} = \frac{F_{CD}}{\sqrt{34}} = \frac{\frac{2\sqrt{34}}{3}}{\sqrt{34}} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad F_{CDx} = 2.33 \text{ Kip}$$

De la misma manera,

$$\sum F_x = 0$$

$$-F_{AD} - F_{CDx} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AD} = 2.33 \text{ Kip} \quad (6)$$

La figura 3.6, muestra el DCL del Nodo B:

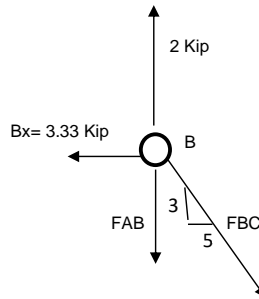


Figura.3.6 Diagrama de cuerpo libre del nodo B

Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

$$\sum F_x + \rightarrow = 0$$

$$-3.33 \text{ Kip} + F_{BCx} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BCx} = 3.33 \text{ Kip} \quad (7)$$

Por semejanza de los triángulos escalar y de fuerzas:

$$\frac{F_{BCy}}{3} = \frac{3.33 \text{ Kip}}{5} = \frac{F_{BC}}{\sqrt{34}} \quad (8)$$

$$F_{BCy} = 2 \text{ Ki} \quad (9)$$

$$F_{BC} = 0.666\sqrt{34} \text{ Kip} \quad (T) \quad (10)$$

Otra forma de realizar el cálculo anterior,

$$F_{BC} = \sqrt{(F_{BCx})^2 + (F_{BCy})^2} \quad (11)$$

Por lo tanto,

$$F_{BC} = \sqrt{(3.33)^2 + (2)^2} = 3.88 \text{ Kip} \quad (12)$$

Para calcular la fuerza sobre el miembro AB es posible escribir para el nodo b la siguiente expresión

$$\sum F_y + \uparrow = 0$$

DCL Nodo B:

$$F_{AB} - F_{BCy} + 2 \text{ Kip} = 0 \quad (12)$$

Por lo tanto,

$$F_{AB} - 2 \text{ Kip} + 2 \text{ Kip} = 0 \quad (13)$$

$$F_{AB} = 0 \quad (14)$$

Resultados:

$$F_{AB} = 0$$

$$F_{AD} = 2.33 \text{ Kip}(C)$$

$$F_{BC} = 3.88 \text{ Kip} (T)$$

$$F_{CD} = 3.89(T)$$

Método de las secciones o de Ritter

Para el análisis de una armadura por el método de las secciones, se secciona o corta la armadura en dos partes (sección ficticia), de tal manera, que no se corten más de tres barras incógnitas (de fuerzas desconocidas). Luego, cada parte resultante después del seccionamiento de la armadura se le aplica las tres condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio estático. Una vez seleccionada la parte para analizar debemos incluir las fuerzas axiales que actúan sobre cada elemento cortado por la sección ficticia; y además deben

incluirse sobre la parte seleccionada de la armadura todas las fuerzas externamente aplicadas como también las reacciones de los apoyos.

Para la aplicación de este método la estática dispone de las siguientes tres ecuaciones escalares:

$$\sum F_x + \rightarrow = 0$$

$$\sum F_y + \uparrow = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_z + \cup = 0$$

Bastidores o marcos

b)

Los bastidores o entramados o marcos es una de las principales clases de estructuras que se utilizan en la ingeniería estructural. Este tipo de estructura proporciona una solución práctica, y una forma simple y económica, que permite dar solución a muchos problemas reales en el ejercicio de la ingeniería. En especial cuando se trata de instalaciones industriales y metalmecánicas.

El bastidor es un sistema estructural que se caracteriza fundamentalmente porque su parámetro fundamental de diseño es la resistencia mecánica. Siendo por tanto, la rigidez un parámetro de diseño secundario.

Como ya se ha dicho, los bastidores constituyen un tipo de estructuras en las que por lo menos, uno de sus miembros está sometido a fuerzas múltiples (más de dos fuerzas). Las máquinas se diferencian de los bastidores, en que las primeras poseen partes móviles (miembros móviles); y que, además, estas partes móviles tienen la función de modificar las fuerzas. Los bastidores al igual que las armaduras están constituidos por miembros que deben satisfacer las tres condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio estático.

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_X = \vec{0} \quad (a)$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_Y = \vec{0} \quad (b)$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_Z = \vec{0} \quad (c)$$

A continuación, en las figuras 3.7, a la 3.10, muestran algunos modelos de bastidores, para ilustrar mejor al lector.

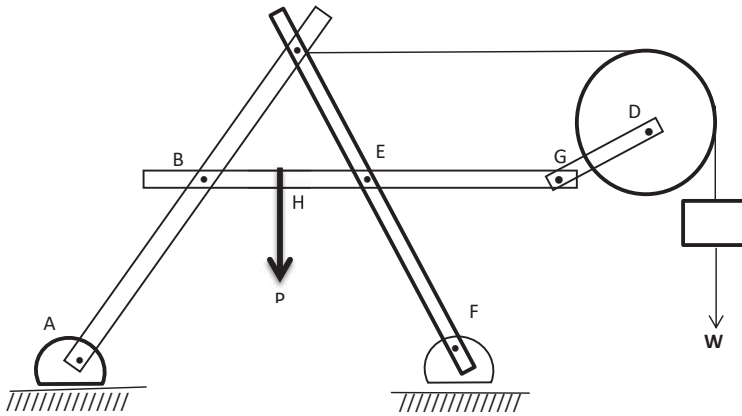


Figura.3.7 Modelo de bastidor 1
Fuente: Mecánica. Ferdinand P. Beer and Johnstonl.2010

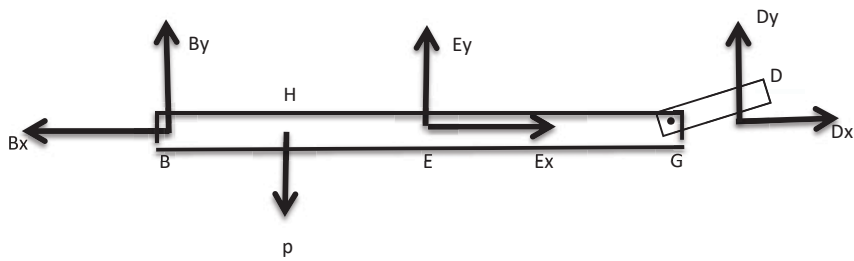


Figura.3.8 Modelo de bastidor 2
Fuente: Mecánica. Ferdinand P. Beer and Johnstonl.2010

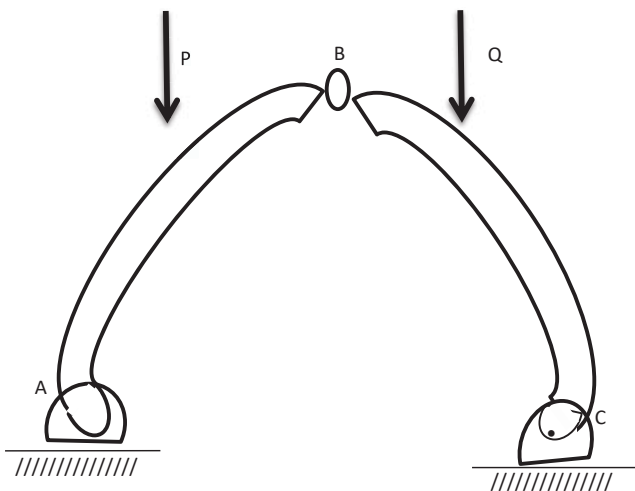


Figura.3.9 Modelo de bastidor 3
Fuente: Mecánica. Ferdinand P. Beer and Johnstonl.2010

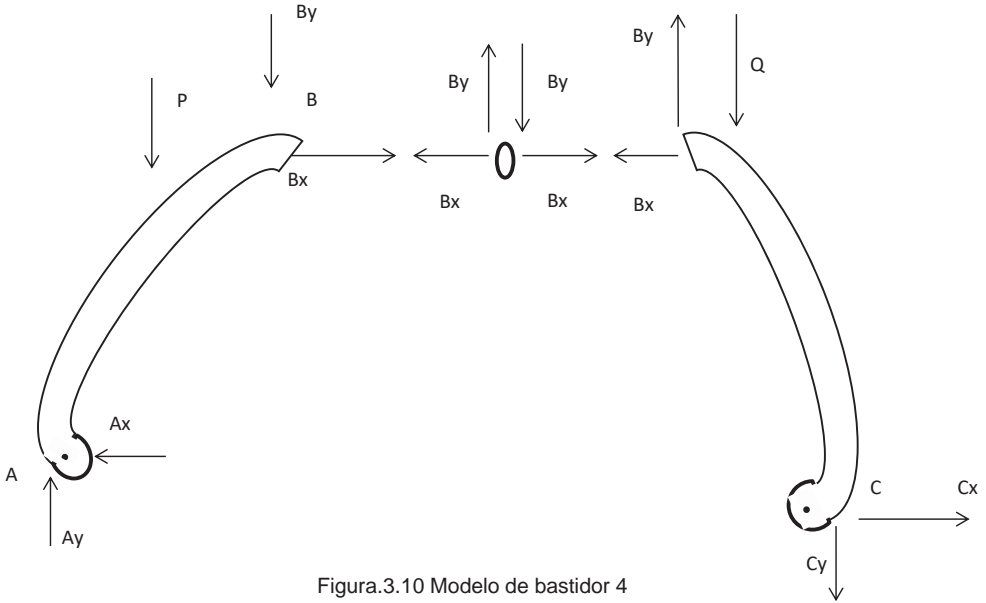


Figura.3.10 Modelo de bastidor 4
Fuente: Mecánica Ferdinand P. Beer and Johnstonl.2010

Problema Ilustrativo 1

El bastidor de la figura soporta un peso de 40 lbs, tal y como se muestra en el gráfico 3.11 que se muestra a continuación. Se determina el diagrama de cuerpo (DCL) del miembro ABCD y la barra CEG.

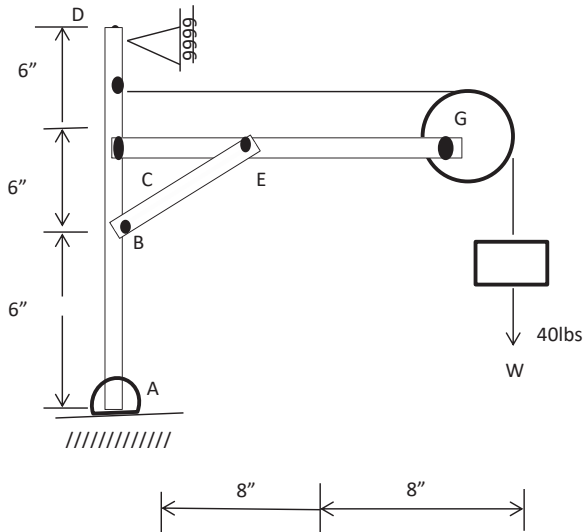


Figura.3.11 Bastidor problema ilustrativo 1
Fuente: Mecánica. Ferdinand P. Beer and Johnstonl.2010

Solución:

A continuación, procedemos con el cálculo de las reacciones de los vínculos externos de la estructura completa (bastidor). Para ello elaboramos el diagrama de cuerpo libre (DCL) del bastidor completo en la figura 3.12:

DCL del bastidor completo:

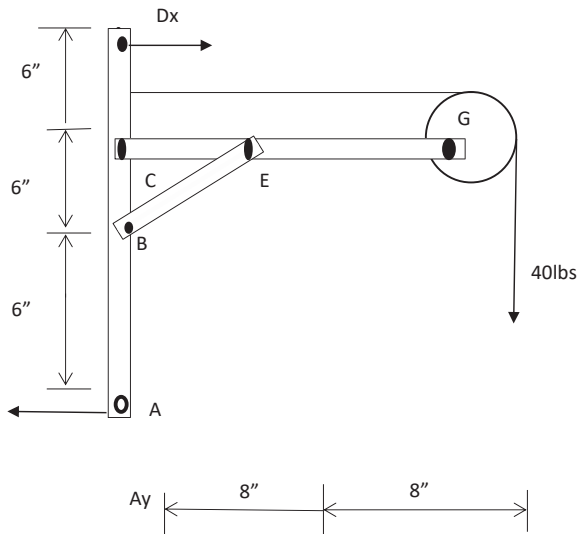


Figura. 3.12 Diagrama de cuerpo libre bastidor problema 1
 Fuente: Pinto, Gómez y Ariza 2019

Cálculo de las Reacciones:

$$\sum_{i=1}^n F_y + \uparrow = 0$$

$$A_y - 40 \text{ lbs} = 0$$

$$A_y = 40 \text{ lbs } \uparrow \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^n M_D + \cup = 0$$

$$-18 A_x - 40 \times 16 = 0$$

$$A_x = 35.6 \text{ lbs } \rightarrow \tag{2}$$

$$D_x = 35.6 \text{ lbs } \leftarrow \tag{3}$$

Ahora procedemos a elaborar el DCL del miembro ABCD, figura 3.13 y luego, aplicamos las condiciones, para el equilibrio estático de éste elemento. A tal efecto, empezaremos calculando el momento del sistema de fuerzas que actúa sobre el miembro en cuestión, respecto de la articulación B.

$$\sum_{i=1}^n M_B + \mathcal{U} = 0$$

$$12 \times 35.6 - 40 \times 9 - 6C_x + 35.6 \times 6 = 0$$

$$C_x = 46.8 \text{ lbs} \quad \leftarrow \quad (4)$$

Resultante, pero esta vez, se calcula respecto, del centro de momentos A, así:

$$35.6 \times 18 - 40 \times 15 - 46.8 \times 12 + 6B_x = 0$$

$$B_x = 86.6 \text{ lbs} \quad \leftarrow \quad (5)$$

Volvemos a calcular el momento;

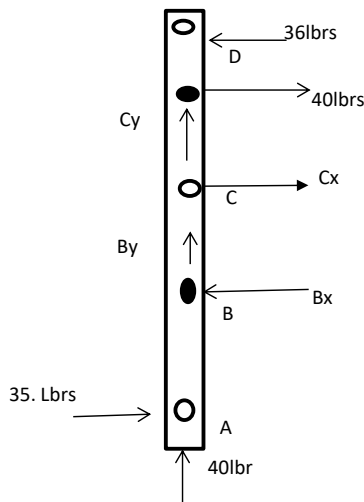


Figura.3.13 Diagrama de cuerpo libre del miembro ABCD
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

DCL del miembro BE y luego, aplicamos las condiciones, para el equilibrio estático de éste elemento, figura 3.14. Empezaremos calculando el momento del sistema de fuerzas que actúa sobre el miembro BE, respecto de la articulación E.

$$\sum_{i=1}^n M_E + \mathcal{U} = 0$$

En consecuencia,

$$86.6 \times 6 + 8 \times B_y = 0$$

$$B_y = 64.95 \text{ lbs} \quad \uparrow \quad (6)$$

Y,

$$E_x = 86.6 \text{ lbs} \quad \leftarrow \quad (7)$$

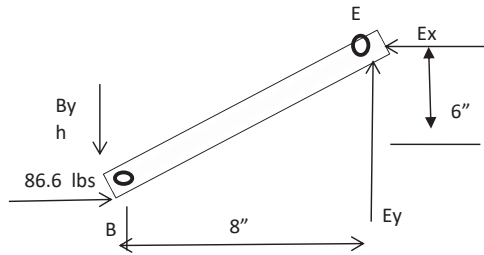


Figura.3.14 Equilibrio estático elemento BE
 Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Y por lo tanto, podemos concluir que la fuerza B_y que actúa sobre el elemento ABCD tiene sentido hacia abajo, o sea, que en el miembro ABCD la fuerza presenta un valor negativo dado su sentido:

$$B_y = 64.95 \text{ lbs } \downarrow$$

Entonces, si $A_y = 40 \text{ lbs } \uparrow$ y además; $B_y = 64.95 \text{ lbs } \downarrow$ Podemos entonces concluir, que C_y tiene un valor cuya magnitud y sentido es el se indica matemáticamente abajo,

$$C_y = 24.95 \text{ lbs } \uparrow \tag{8}$$

Después de haber realizado el análisis de todas las fuerzas que actúan sobre el miembro ABCD podemos elaborar un nuevo DCL del elemento, como se muestra en la figura 3.15:

Nuevo DCL del miembro del bastidor ABCD:

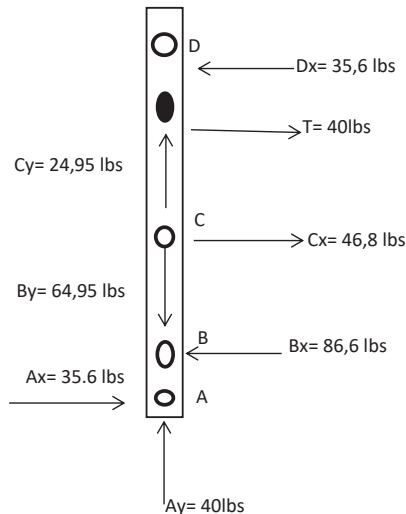


Figura.3.15 Diagrama de cuerpo libre de todas las fuerzas en ABCD
 Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Problema Ilustrativo 2

Dado el bastidor de la figura 3.16 que se muestra a continuación. Determinar:

- Hallar una expresión general, para las reacciones de los apoyos y para la articulación en B
- Dados los valores: $P = 112 \text{ KN}$ y $Q = 140 \text{ KN}$ Se pide calcular las reacciones de los apoyos y de la articulación del bastidor mostrado.
- Si cambiamos los valores de las cargas externas $P = 140 \text{ KN}$ y $Q = 112 \text{ KN}$. Hallar el DCL de cada uno de los miembros del bastidor.

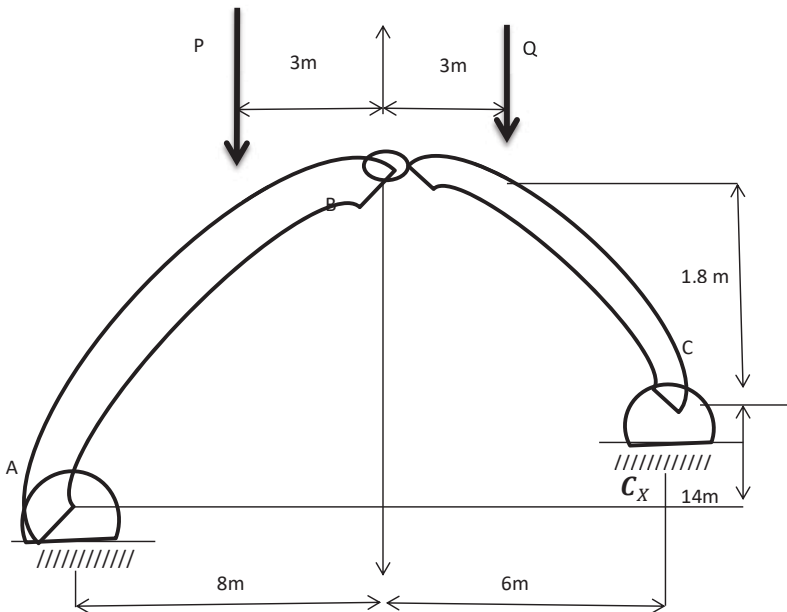


Figura.3.16 Figura de Bastidor del problema ilustrativo 2.

Fuente: Mecánica Ferdinand Beer and Johnston 2010

Solución:

Seguidamente, procedemos con el cálculo de las reacciones de los apoyos externos (dos articulaciones externas) tiene la estructura completa. Para ello, elaboramos el diagrama de cuerpo libre (DCL) de la barra AB, en la figura 3.17.

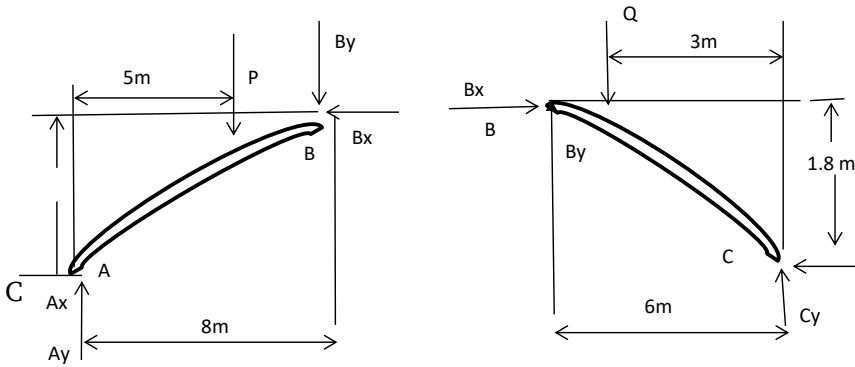


Figura.3.17 Diagrama de cuerpo libre barra AB
 Fuente: Mecánica Ferdinand Beer and Johnston 2010

- a) Hallar una expresión general, para las reacciones de los apoyos y para las fuerzas en la articulación interna B.

DCL de la estructura completa:

$$\sum_{i=1}^n M_C + \mathcal{U} = 0$$

$$-14A_y + 1.4A_x + 9P + 3Q = 0 \quad (1)$$

La figura 3.18 muestra el DCL del miembro AB:

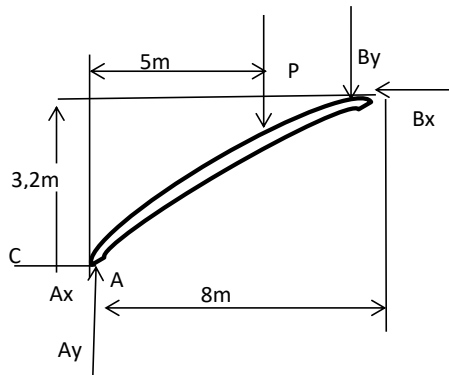


Figura.3.18. Diagrama de cuerpo libre miembro AB
 Fuente: Mecánica Ferdinand Beer and Johnston 2010

$$\sum_{i=1}^n M_B + \mathcal{U} = 0$$

$$-8A_y + 3.2A_x + 3P = 0 \quad (2)$$

De la Ecuación (2) se desprende que,

$$A_x = \frac{8A_y - 3P}{3.2} \quad (3)$$

Sustituyendo la Ecuación (3) en la Ecuación (1), resulta:

$$-14A_y + 1.4 \frac{8A_y - 3P}{3.2} + 9P + 3Q = 0 \quad (4)$$

$$-14A_y + 3.5A_y - 1.313P + 9P + 3Q = 0 \quad (5)$$

Por lo tanto,

$$A_y = \frac{7.687}{10.5}P + \frac{3Q}{10.5} \quad \uparrow = 0.7321P + 0.2857Q \quad \uparrow \quad (6)$$

Pero también,

$$A_y - P = B_y \quad (7)$$

Sustituyendo, (6) en (7), queda:

$$B_y = -0.2679P + 0.2857Q \quad \downarrow \quad (8)$$

Reemplazando, (6) en (3), resulta:

$$A_x = \frac{8 \left(\frac{7.687}{10.5}P + \frac{3Q}{10.5} \right) - 3P}{3.2} = 1.83P + 0.71Q - 0.9375P \quad (9)$$

O en forma equivalente,

$$A_x = 0.8925P + 0.71Q \quad \rightarrow \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^n F_x \rightarrow = 0$$

O sea, que:

$$A_x - B_x = 0 \quad (11)$$

O también,

$$B_x = 0.8925P + 0.71Q \quad \leftarrow \quad (12)$$

Retomando el DCL de la estructura completa, podemos establecer la condición necesaria para el equilibrio estático del bastidor, debida a la acción de todas las fuerzas horizontales que actúan sobre él, así:

$$\sum_{i=1}^n F_x \rightarrow = 0$$

$$A_x - C_x = 0 \quad (13)$$

De donde se desprende que,

$$C_x = 0.8925P + 0.71Q \quad \leftarrow \quad (14)$$

También, de forma análoga podemos escribir el equilibrio de las fuerzas verticales externas y las respectivas reacciones de los apoyos, obteniéndose, las siguientes ecuaciones escalares:

$$\sum_{i=1}^n F_y + \uparrow = 0$$

Por lo tanto, podemos escribir:

$$A_y - P - Q + C_y = 0 \quad (15)$$

Sustituyendo la Ecuación (6) en la Ecuación escalar (15) y despejando C_y de la expresión resultante, obtiene la reacción vertical en el apoyo C:

$$C_y = -0.7321P - 0.2857Q + P + Q \quad (16)$$

O en forma equivalente,

$$C_y = 0.2679P + 0.7143 \uparrow \quad (17)$$

Resultados (a) de las expresiones generales:

$$A_x = 0.8925P + 0.71425Q \rightarrow$$

$$A_y = 0.7321P + 0.2857Q \uparrow$$

$$B_x = 0.8925P + 0.71425Q \leftarrow$$

$$B_y = -0.2679P + 0.2857Q \downarrow$$

$$C_x = 0.8925P + 0.71Q \leftarrow$$

$$C_y = 0.2679P + 0.7143Q \uparrow$$

La figura 3.19 muestra el nuevo DCL correspondiente a la parte (a):

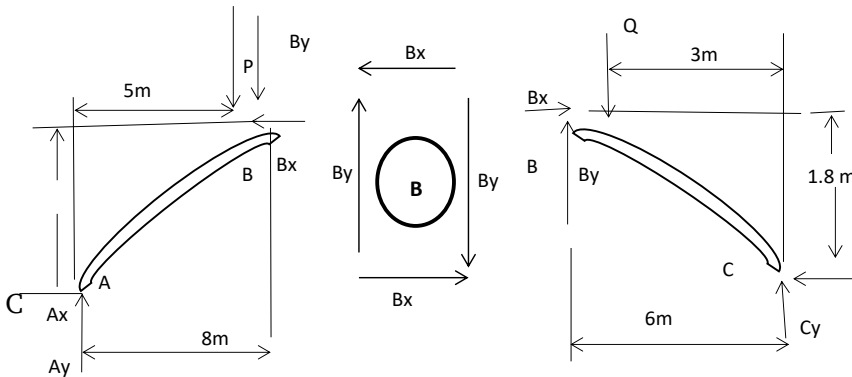


Figura.3.19 Nuevo diagrama de cuerpo libre parte (a)
 Fuente: Mecánica Ferdinand Beer and Johnston 2010

Resultados (a):

$$A_x = 0.8925P + 0.71425Q \rightarrow$$

$$A_y = 0.7321P + 0.2857Q \uparrow$$

$$B_x = 0.8925P + 0.71425Q \leftarrow$$

$$B_y = -0.2679P + 0.2857Q \downarrow$$

$$C_x = 0.8925P + 0.71Q \leftarrow$$

$$C_y = 0.2679P + 0.7143Q \uparrow$$

- b) Dados los valores: $P = 112 \text{ KN}$ y $Q = 140 \text{ KN}$ Se pide calcular las reacciones de los apoyos y de la articulación del bastidor mostrado en la figura 3.20. Para ello vamos a elaborar un nuevo DCL con el sistema de cargas externas propuesto; y luego, procederemos nuevamente a determinar las fuerzas internas y las reacciones de los apoyos en el caso particular propuesto.

Lo importante en este caso, es que conocemos las cargas externas que actúan sobre el bastidor.

Datos:

$P = 112 \text{ KN}$ Carga externa que actúa sobre el miembro AB.

$Q = 140 \text{ KN}$ Carga externa que soporta el elemento BC.

DCL de la estructura completa:

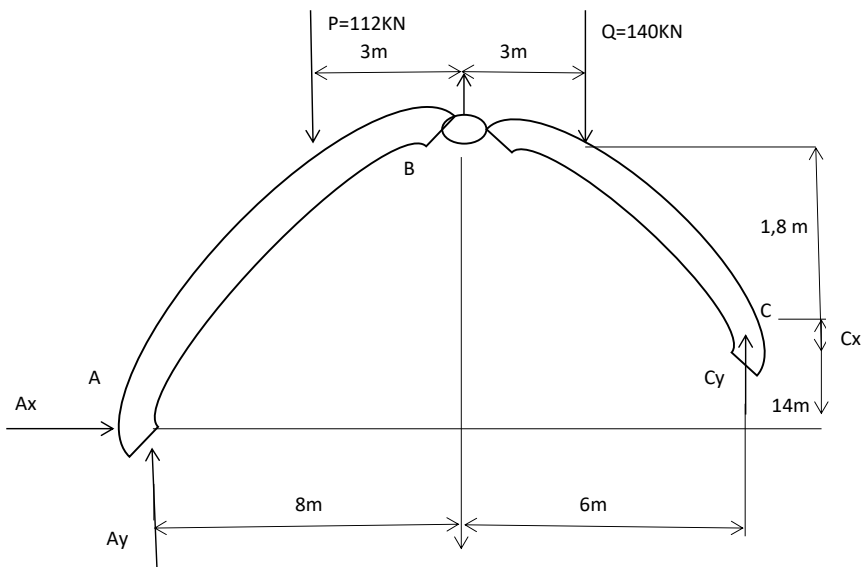


Figura.3.20 Bastidor con cargas externas
Fuente: Mecánica Ferdinand Beer and Johnston 2010

Reacciones en la articulación externa A:

$$\sum_{i=1}^n M_C + \mathcal{U} = 0$$
$$-14A_y + 1.4A_x + 9 \times 112 + 3 \times 140 = 0 \quad (a)$$

DCL miembro AB:

$$\sum_{i=1}^n M_B + \mathcal{U} = 0$$
$$3.2A_x - 8A_y + 3 \times 112 = 0 \quad (b)$$

$$A_x = \frac{8A_y - 336}{3.2} = 2.5A_y - 105 \text{KN} \quad (c)$$

Sustituyendo, (c) en la Ecuación (a):

$$-14A_y + 1.4(2.5A_y - 105) + 1008 + 420 \quad (d)$$

$$A_y = 122 \text{ KN } \uparrow \quad (e)$$

Simplificando, Reemplazando la Ecuación escalar (e) en (c), resulta:

$$A_x = 200 \text{ KN } \rightarrow \quad (f)$$

En consecuencia, podemos deducir también que:

$$B_x = 200 \text{ KN } \leftarrow \quad (g)$$

E igualmente,

$$B_y = 10 \text{ KN } \downarrow \quad (h)$$

Reacciones en la articulación externa c: DCL del miembro estructura completa:

$$\sum_{i=1}^n F_y + \uparrow = 0$$

En general,

$$A_y - P - Q + C_y = 0 \quad (i)$$

Por lo tanto,

$$C_y = -122 \text{ KN} + 112 \text{ KN} + 140 \text{ KN} = 130 \text{ KN } \uparrow \quad (j)$$

De la misma manera,

$$\sum_{i=1}^n F_x + \rightarrow = 0$$

$$A_x - C_x = 0 \quad (k)$$

En consecuencia,

$$C_x = 200 \text{ KN } \leftarrow \quad (l)$$

En general, para mantener el equilibrio estático del bastidor, bajo las condiciones de cargas externas aplicadas, o sea, el sistema de cargas a la que está sometida la estructura debe satisfacerse el DCL que se presenta a continuación en la figura 3.21, que incluye, además, de las magnitudes de las reacciones que son la respuesta de los vínculos. El DCL, muestra también el verdadero sentido de las componentes de las fuerzas-reacciones, de los apoyos encargados de llevar las cargas aplicadas a tierra.

DLC definitivo (b):

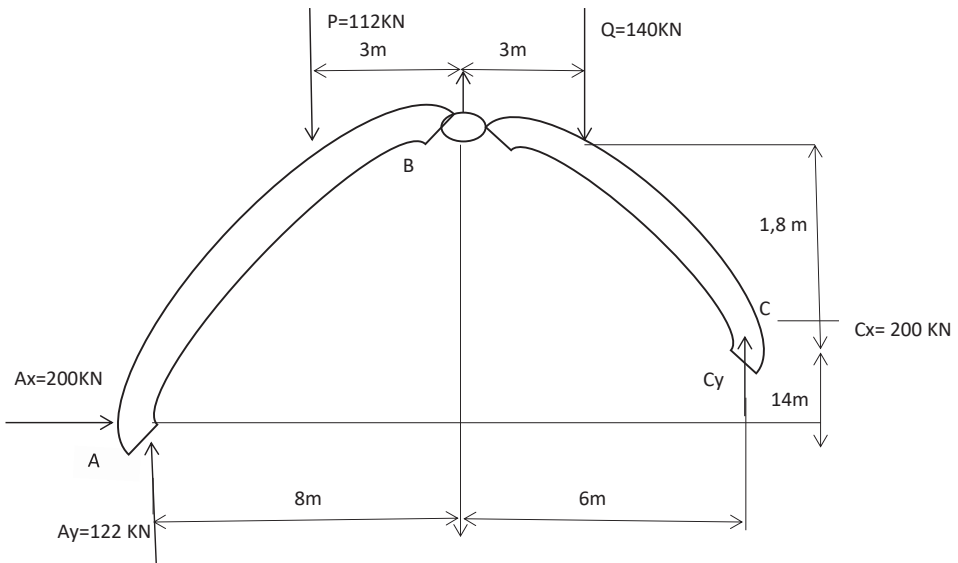


Figura.3.21 Diagrama de cuerpo libre definitivo del Bastidor
Fuente: Mecánica Ferdinand Beer and Johnston 2010

Resultados (b):

$$A_y = 122 \text{ KN } \uparrow$$

$$A_x = 200 \text{ KN } \rightarrow$$

$$B_y = 10 \text{ KN } \downarrow$$

$$B_x = 200 \text{ KN } \leftarrow$$

$$C_y = 130 \text{ KN } \uparrow$$

$$C_x = 200 \text{ KN } \leftarrow$$

c) Dados los valores: $P = 140 \text{ KN}$ y $Q = 112 \text{ KN}$ como la nueva condición de cargas externas aplicadas sobre el bastidor. Se pide hallar, el DCL de cada uno

de los miembros del bastidor; y calcular las reacciones de los apoyos y de la articulación interna del bastidor mostrado. Para ello, vamos a construir un nuevo DCL con el nuevo sistema de cargas externas propuesto; y, por último, procederemos nuevamente a determinar las fuerzas internas y las reacciones de los apoyos en el caso particular propuesto.

Datos:

$P = 140 \text{ KN}$ Carga externa que actúa sobre el miembro AB.

$Q = 112 \text{ KN}$ Carga externa que soporta el elemento BC

La figura 3.22, muestra el DCL de la estructura completa:

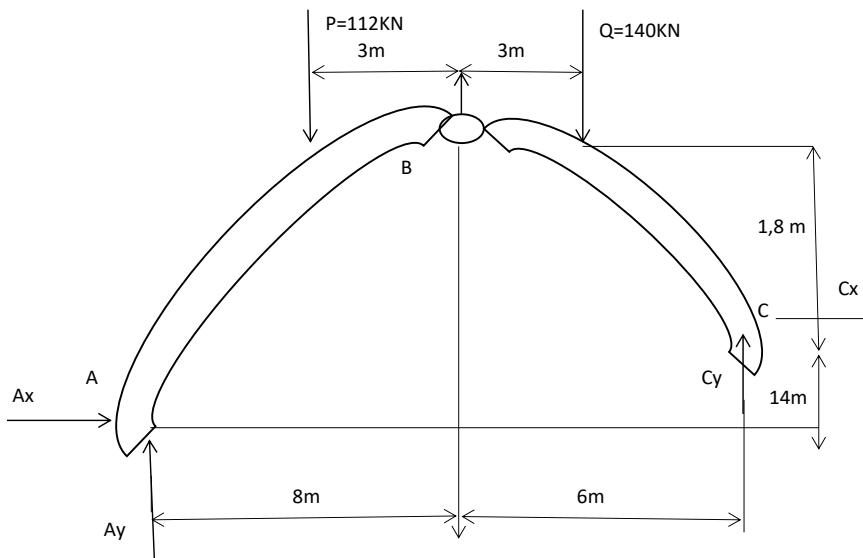


Figura.3.22 Estructura completa de un Bastidor
 Fuente: Mecánica Ferdinand Beer and Johnston

Reacciones en la articulación externa A:

$$\sum_{i=1}^n M_C + \mathcal{U} = 0$$

$$-14A_y + 1.4A_x + 9 \times 140 + 3 \times 112 = 0 \quad (m)$$

DCL miembro AB:

$$\sum_{i=1}^n M_B + \mathcal{U} = 0$$

$$3.2A_x - 8A_y + 3 \times 140 = 0 \quad (n)$$

$$A_x = \frac{8A_y - 420}{3.2} = 2.5A_y - 131.25 \text{ KN} \quad (o)$$

Sustituyendo, (n) en la Ecuación (l):

$$-14A_y + 1.4(2.5A_y - 131.25) + 1260 + 336 \quad (p)$$

Simplificando,

$$A_y = 134.5 \text{ KN } \uparrow \quad (q)$$

Reemplazando la Ecuación escalar (p) en (n), resulta:

$$A_x = 205 \text{ KN } \rightarrow \quad (r)$$

En consecuencia, podemos deducir también que:

$$B_x = 205 \text{ KN } \leftarrow \quad (s)$$

E igualmente,

$$B_y = 5.5 \text{ KN } \uparrow \quad (t)$$

Reacciones en la Articulación Externa C:

DCL del miembro estructura completa:

$$\sum_{i=1}^n F_y + \uparrow = 0$$

En general,

$$A_y - P - Q + C_y = 0 \quad (u)$$

Por lo tanto,

$$C_y = -134.5 \text{ KN} + 140 \text{ KN} + 112 \text{ KN} = 117.5 \text{ KN } \uparrow \quad (v)$$

De la misma manera,

$$A_x - C_x = 0 \quad (w)$$

En consecuencia,

$$C_x = 205 \text{ KN } \leftarrow \quad (x)$$

Como es necesario mantener el equilibrio estático del bastidor, bajo las nuevas condiciones de cargas externas aplicadas, o sea, que el nuevo sistema de cargas a la que está sometido el bastidor, debe satisfacerse en el DCL que se presenta a continuación, que incluye las magnitudes de las reacciones, como la respuesta de los vínculos o apoyos. El DCL, muestra también, el sentido de las componentes de las fuerzas-reacciones, de los apoyos encargados de llevar el sistema de fuerzas aplicadas a tierra.

La figura 3.23 muestra el DCL definitivo (b):

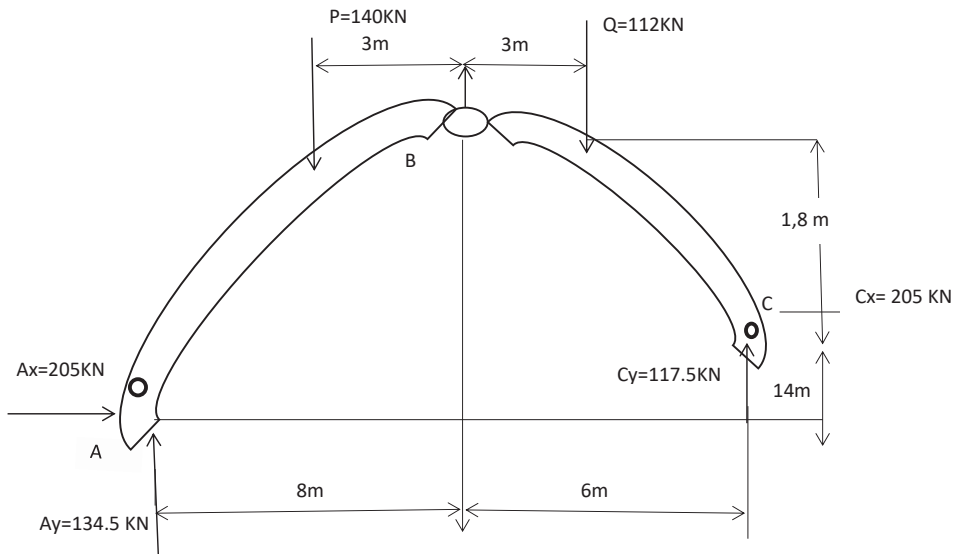


Figura.3.23 Diagrama de cuerpo libre definitivo de un bastidor
 Fuente: Mecánica Ferdinand Beer and Johnston

Resultados (c):

$$A_y = 134.5 \text{ KN } \uparrow$$

$$A_x = 205 \text{ KN } \rightarrow$$

$$B_y = 5.5 \text{ KN } \uparrow$$

$$B_x = 205 \text{ KN } \leftarrow$$

$$C_y = 117.5 \text{ KN } \uparrow$$

$$C_x = 205 \text{ KN } \leftarrow$$

Problema Ilustrativo 3

Para el bastidor y sistema de cargas aplicadas mostrados en la figura 3.24. Se pide determinar las componentes de todas las fuerzas que actúan:

- En el miembro BEH.
- En la barra DABC.
- Mostrar el DCL de la estructura completa.

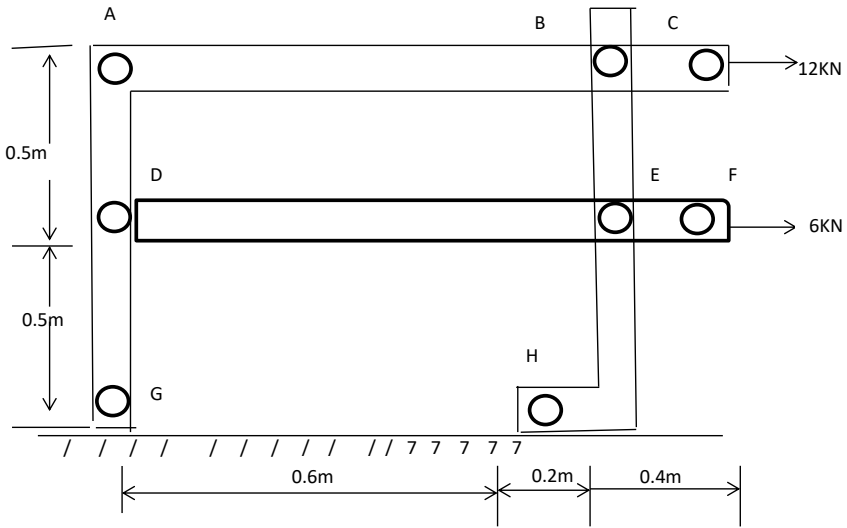


Figura.3.24 Bastidor y sistema de cargas aplicadas
Fuente: Mecánica Ferdinand Beer and Johnston 2010

Solución:

Condiciones para el equilibrio estático

$$\sum_{i=1}^n F_x + \rightarrow = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_y + \uparrow = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_{z-z} + \curvearrow = 0$$

La figura 3.25 muestra el DCL del Bastidor Completo

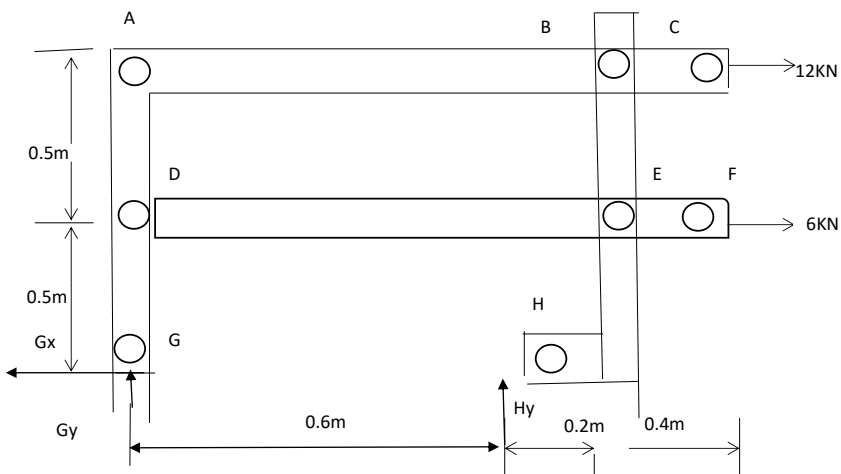


Figura.3.25 Diagrama de cuerpo libre del bastidor completo
Fuente: Mecánica Ferdinand Beer and Johnston 2010

Cálculo de Reacciones:

$$\sum_{i=1}^n M_G + \mathcal{U} = 0$$

$$0.6H_y - 1 \times 12 \text{ KN} - 0.5 \times 6 \text{ KN} = 0$$

$$H_y = 25 \text{ KN} \quad \uparrow$$

$$\sum_{i=1}^n F_y + \uparrow = 0$$

$$G_y + 25 \text{ KN} = 0 \Rightarrow G_y = 25 \text{ KN} \downarrow$$

a) DCL del BEH, se muestra en la figura 3.26

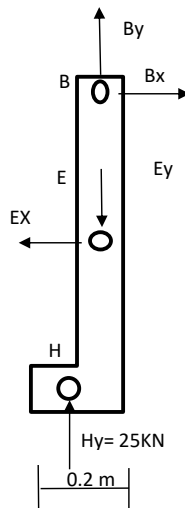


Figura.3.26 Diagrama de cuerpo libre del elemento BEH.

Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

$$\sum_{i=1}^n M_B + \mathcal{U} = 0$$

$$-0.2 \times 25 \text{ KN} - 0.5E_x = 0$$

Por lo tanto,

$$E_x = 10 \text{ KN} \quad \rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n F_x + \rightarrow = 0$$

$$10 \text{ KN} + B_x = 0$$

En consecuencia,

$$B_x = 10 \text{ KN} \quad \leftarrow$$

a) Nuevo DCL del BEH, se muestra en la figura 3.27 siguiente

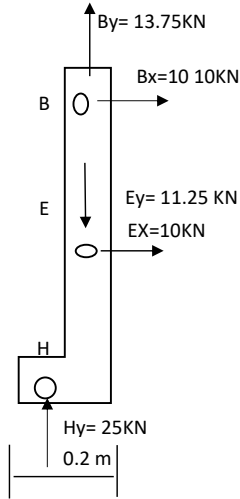


Figura.3.27 Nuevo diagrama de cuerpo libre del elemento BEH.
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

b) Resultados Miembro BEH

$$B_y = 13.75 \text{ kN} \quad \downarrow$$

$$B_x = 10 \text{ kN} \quad \leftarrow$$

$$E_y = 11.25 \text{ kN} \quad \uparrow$$

$$E_x = 10 \text{ kN} \quad \rightarrow$$

DCL de la Barra DABC, se observa en la figura 3.28

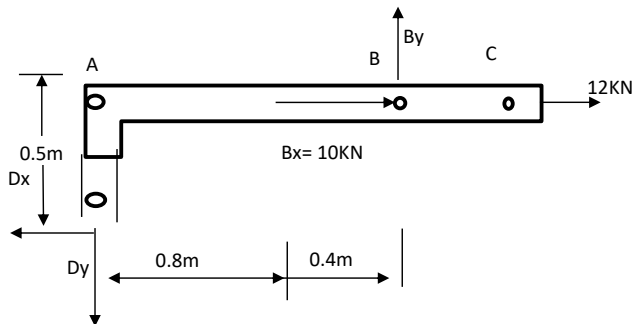


Figura.3.28 Diagrama de cuerpo libre barra DABC.
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

$$\sum_{i=1}^n M_D + \mathcal{U} = 0$$

$$0.8B_y - 0.5 \times 10 \text{ KN} - 0.5 \times 12 = 0 \quad (8)$$

Por lo tanto,

$$B_y = 13.75 \text{ KN} \quad \uparrow \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^n F_y + \uparrow = 0$$

En consecuencia,

$$-D_y + 13.75 \text{ KN} = 0$$

Por lo tanto,

$$D_y = 13.75 \text{ KN} \quad \downarrow \quad (10)$$

Y, además,

$$D_x = 10 \text{ KN} \quad \leftarrow \quad (11)$$

a) Nuevo DCL de la Barra DA, se muestra en la figura 3.29

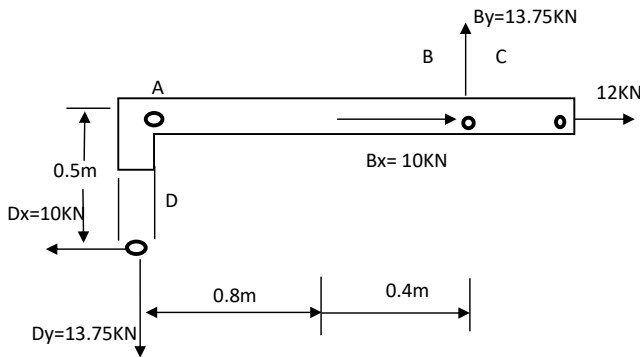


Figura.3.29 Nuevo diagrama de cuerpo libre de la barra DA.
 Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

b) Resultados DCL Barra DABC

$$B_y = 13.75 \text{ KN} \quad \uparrow$$

$$B_x = 10 \text{ KN} \quad \rightarrow$$

$$D_y = 13.75 \text{ KN} \quad \downarrow$$

$$D_x = 10 \text{ KN} \quad \leftarrow$$

a) DCL de la Barra DEF, se puede ver en la figura 3.30:

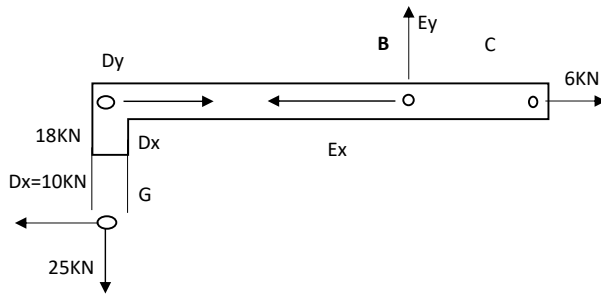


Figura.3.30 Diagrama de cuerpo libre de la barra DEF.
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

b) Nuevo DCL de la Barra DEF, se observa en la figura 3.31:

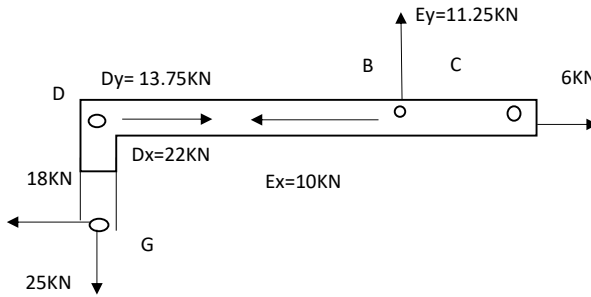


Figura.3.31 Nuevo diagrama de cuerpo libre de la barra DEF.
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

$$\sum_{i=1}^n M_G + \mathcal{U} = 0$$

$$-0.5D_x + 0.5 \times 10 - 0.5 \times 6 + 0.8 \times 11.25 = 0 \quad (12)$$

$$D_x = 22 \text{ KN} \rightarrow \quad (13)$$

c) Resultados DCL Barra DEF

$$D_y = 13.75 \text{ KN} \quad \uparrow$$

$$D_x = 22 \text{ KN} \quad \rightarrow$$

$$E_y = 11.25 \text{ KN} \quad \uparrow$$

$$E_x = 10 \text{ KN} \quad \leftarrow$$

Seguidamente, vamos a elaborar el DCL del bastidor completo en la figura 3.32, para mostrar las fuerzas que actúan en cada miembro de la estructura completa. Cabe destacar que para lograr este objetivo se aplicó en forma reiterada, la Tercera Ley de Newton o Ley de Acción Reacción.

Los resultados obtenidos, y que se muestran a continuación, le muestran al lector el análisis estructural del bastidor; e igualmente se puede apreciar en el DCL que se cumplen plenamente las condiciones para el equilibrio estático de la estructura.

DCL del bastidor completo:

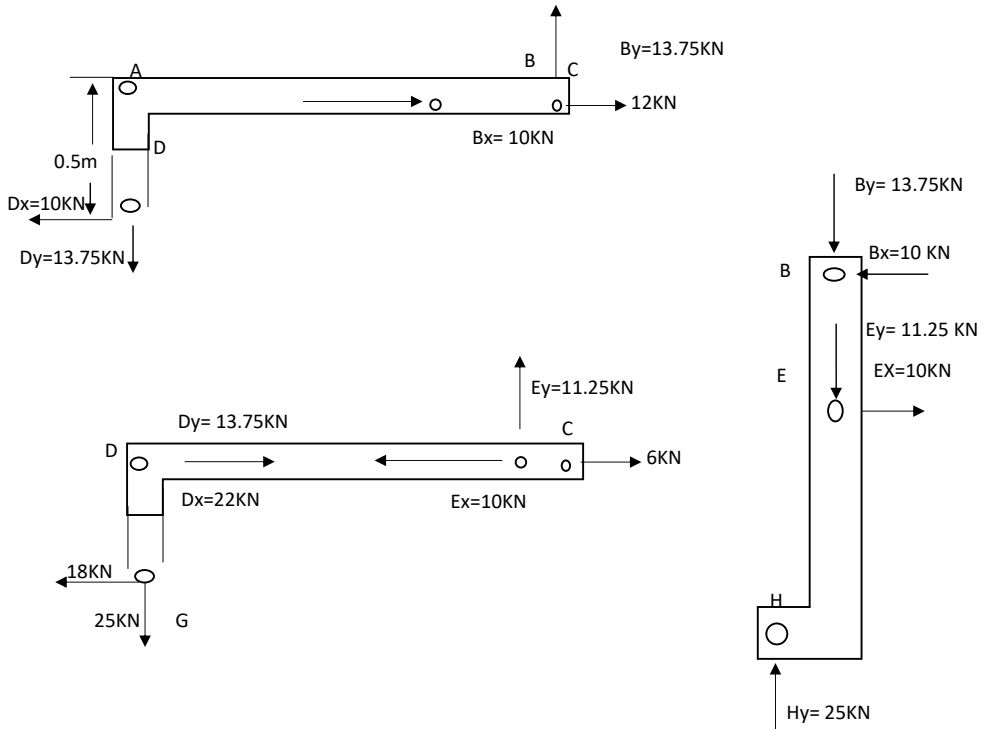


Figura.3.32 Bastidor completo.
 Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Referencias bibliográficas

Awad, R. Mecánica vectorial para ingenieros, Estática. 9^ª ed. Ed Mac Graw Hill, 2013.

Beer, F. and Johnston, E. Mecánica Vectorial para Ingenieros – Estática, sexta Edición. Ed. Mc Graw Hill, 2010.

Ginsberg, J. Ingeniería Mecánica “Estática”. Ed interamericana, México, 1998.

Harry, Nara. Mecánica vectorial para Ingenieros, estática. Ed. Limusa, 1994.

Huang, T.C. Mecánica vectorial para ingenieros Estática, tomo I. Ed P.U.C., 1994.

Hibbelerr, R. C. Engineering Mechanics Statics 12th Edition. Ed. Pearson, 2009.

Meriam, J. L., Kraige, L. G. Estática. 3^a edición en español. Ed., Reverte. 2012.

Targ, S. M. Curso breve de Mecánica Teórica. 2^a ed. Ed. MIR, 1976.

Pinto, L., Melo, S., Socarrás, C. Mecánica vectorial para Ingenieros Estática. Ed. Universidad Simón Bolívar. Barranquilla, Colombia, agosto de 2016.

ISBN 978-958-5178-31-1



9 78 9585 178311