TOMO II

MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS

Dinámica vectorial

Lacides Pinto Mindiola
Olenka Gómez Julio
Fernando Ariza Daza

UNIVERSIDAD DE LA GUAJIRA | SHIKII EKIRAJIA PULEE WAJIIRA

MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS:

Dinámica vectorial Tomo II

MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS:
Dinámica vectorial Tomo II

Lacides Pinto Mindiola
Olenka Gómez Julio
Fernando Ariza Daza

UNIVERSIDAD DE LA GUAJIRA | SHIKII EKIRAJIA PULEE WAJIIRA

MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS:
Dinámica vectorial Tomo II

Primera edición, 2020

ISBN: 978-958-5178-30-4

Depósito legal

Portada:
Luz Mery Avendaño

Impresión:
Editorial Gente Nueva

Impreso en Colombia
Printed in Colombia

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por permitirnos compartir estas experiencias académicas y seguir creciendo como profesionales.

A nuestras familias, quienes hacen la diferencia, porque, aunque no aceptan nuestra distancia, la respetan y nos animan siempre a continuar.

Los autores.

Contenido

CAPÍTULO IV

CAPÍTULO V

CAPÍTULO VI

Índice de Figuras

Índice de Tablas

Pág.

Prólogo

En el campo de la Mecánica vectorial, resulta complejo descubrir un texto que integre las relaciones entre las proposiciones relacionadas con los cuerpos físicos estudiados y las características asignadas a los modelos que estos significan. No obstante, para el desarrollo del libro, nos propusimos de forma responsable que el lector se pueda familiarizar con los modelos aquí consignados; entendiendo como modelo, la representación de un objeto.

Asimismo, ambicionamos establecer una discrepancia entre el documento actual y los que se han publicado hasta el momento, en términos de la organización por capítulos y la minuciosa selección de temas y subtemas correspondientes a cada uno.

Es así como, el contenido de los capítulos del texto muestra de forma ilustrativa diversos ejemplos que el estudiante tendrá como instrumento complementario de estudio para afianzar su entendimiento de manera pormenorizada.

Los autores, para la escritura del libro, aunaron todo su esfuerzo para compartir con los lectores la mejor de las publicaciones en esta área, alcanzando así, un buen nivel en la estructuración del mismo.

Introducción

La Mecánica Vectorial, está comprendida por la cinemática y la Dinámica; La primera parte, comprometida de manera solidaria con el estudio de las leyes que describen el movimiento de partículas y cuerpos rígidos, independiente de las causas que producen este movimiento; llámese fuerzas o momentos. En otras palabras, la cinemática estudia la geometría del movimiento sin las consideraciones de su naturaleza física.

Cómo segunda parte del texto, se incluye un concepto no menos relevante que la Cinemática, representado por la Dinámica, como eje fundamental de la Mecánica vectorial, esta estudia el movimiento de los cuerpos en cualquier instante y bajo la acción de un sistema de fuerzas no equilibradas, las fuerzas activas aplicadas, las reacciones de los vínculos impuestos y la fuerza de inercia.

En este orden de ideas, relacionamos los dos fundamentos claves al presente libro "*Mecánica vectorial para ingenieros tomo II*", cuyo propósito principal es presentar a la comunidad académica una herramienta útil que integre los principios básicos de la mecánica vectorial, y que pueda representar en el lector una herramienta teórica-práctica en la solución eficaz de los problemas ingenieriles. Para ello, los autores sumaron todos sus esfuerzos en la descripción clara y sencilla de cada uno de los temas y ejercicios complementarios de los capítulos que contiene el libro, de tal manera que, al estudiante, profesor y/o profesional de la Ingeniería se le facilite su comprensión.

El texto que presentamos, comprende seis capítulos; estructurados de manera inicial con la definición de conceptos claves de la cinemática y la dinámica, elementales para los lectores en la resolución de los problemas ilustrativos que fueron minuciosamente seleccionados e incluidos en cada uno de ellos.

Es así, cómo los tres capítulos iniciales del libro abordan temas relacionados con la Cinemática de la partícula, cinemática de los sistemas de referencias rígidos y del movimiento de dos cuerpos rígidos respectivamente, complementados con los vectores de velocidad aceleración de la partícula, relaciones de Poisson, demostraciones y problemas de aplicación.

El capítulo 4, presenta los conceptos relevantes de la Dinámica de la partícula, los métodos, ecuaciones del movimiento y la fuerza resultante como función de la posición, la rapidez y el tiempo, entre otros conceptos.

Finalmente, el capítulo 5 y 6, relacionan el movimiento rectilíneo- fuerza constante como función del tiempo y la posición, el movimiento de sistemas mecánicos donde la fuerza resultante es una función de posición o de la velocidad, las características del movimiento armónico simple, el período y la amplitud del movimiento, con los que cierra los conceptos en el último capítulo de este texto.

CAPÍTULO I

Cinemática de la partícula

La Cinemática es aquella parte de la mecánica responsable de estudiar las leyes que describen el movimiento de partículas y cuerpos rígidos, independientemente de las causas que lo producen (fuerzas–momentos). En otras palabras, la cinemática estudia la geometría del movimiento sin consideraciones de naturaleza física.

Comenzaremos la cinemática con el estudio del movimiento de la partícula. A tal efecto, estableceremos los conceptos fundamentales de esta disciplina. La Cinemática tiene como conceptos primitivos (indefinibles), el espacio y el tiempo; y como axiomas (leyes o principios), los mismos de la geometría euclidiana. La relación espacio–tiempo (cuatro dimensiones) en el movimiento, ocupa por completo a la Cinemática, no dando cabida dentro de su descripción a las Leyes de Newton, que se refieren permanentemente a la relación fuerza–masa; que es fundamental para el estudio del movimiento dentro de la Dinámica.

Por conveniencia metodológica, vamos a dividir la descripción del movimiento en dos fases. La primera, será la cinemática de la partícula y la segunda, la cinemática del cuerpo rígido. Esto es, debido a que el movimiento de un cuerpo, está determinado por el movimiento de sus partículas; y, en consecuencia, de esta manera se podrá llegar a conocer el movimiento del cuerpo completo.

Con el fin de precisar el concepto de movimiento de una partícula en el espacio presentamos la siguiente definición:

Se dice que una partícula P está animada de movimiento en el espacio tridimensional cuando es posible establecer una función $\vec{\mathrm{r}}$, de tal manera que en cualquier instante t se cumple siempre que el vector $\vec{\mathrm{r}}(\mathrm{t})$ se puede expresar matemáticamente, a través de la ley:

$$\vec{\mathrm{r}} = \vec{\mathrm{r}}(\mathrm{t}) \tag{1.1}$$

Siendo el vector $\vec{r} = \vec{r}(t)$ el llamado vector de posición de la partícula P con respecto al origen O de un sistema de referencia. Ver la Figura (1).

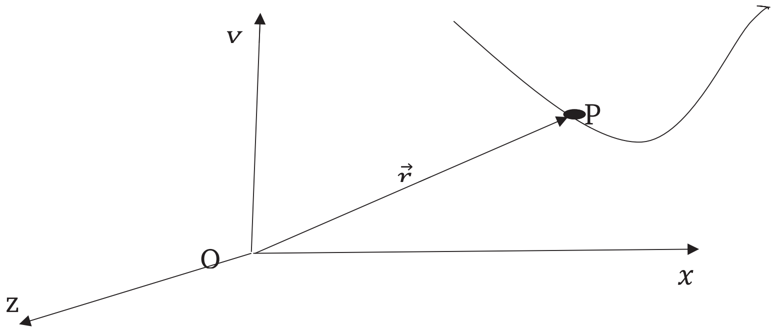


Figura 1. Trayectoria de la partícula P
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Vector velocidad de la partícula

Se define el vector velocidad de la partícula P o sencillamente 'velocidad de P' al vector $\vec{v}(t)$, ligado a la partícula P, que viene dado matemáticamente por la expresión vectorial:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}\,(t)}{dt} \tag{1.2}$$

En donde el vector $\vec{r}(t)$ representa el vector de posición de la partícula P con respecto, al origen O fijo de coordenadas.

Vector aceleración de la partícula

En correspondencia con la definición de velocidad expresada anteriormente, podemos fácilmente deducir, que a cada posición de la partícula en cuestión le corresponde en general, un vector velocidad $\vec{v}(t)$. Por definición, el vector aceleración de la partícula en movimiento, se determina mediante la ecuación vectorial que se escribe a continuación:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}\,(t)}{dt} \tag{1.3}$$

Descripción cartesiana del movimiento de la partícula

Considérese que τ es la trayectoria descrita por la partícula P durante su movimiento; y sea también, $\vec{r}$ su correspondiente vector de posición en un instante cualquiera medido desde el origen del sistema de referencia $\{oxyz\}$ de base ortonormal $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$. En consecuencia, podríamos escribir vectorialmente la siguiente representación:

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} \tag{1.4}$$

En donde $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, son respectivamente las proyecciones del vector $\vec{r}$ sobre los distintos ejes coordenados.

a) Vector velocidad:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}\right) \tag{1.5}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dy}{dt}\hat{k} \tag{1.6}$$

Ya que,

$$\frac{d\hat{\imath}}{dt} = \frac{d\hat{\jmath}}{dt} = \frac{d\hat{k}}{dt} = 0 \tag{1.7}$$

En adelante, la derivada de una variable, escalar o vectorial respecto del tiempo, la denotaremos con el nombre de la variable y un punto encima de esta, así por ejemplo:

Por lo tanto, el vector velocidad bien puede reescribirse, así.

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\imath} + \dot{z}\hat{\imath} \tag{1.8}$$

b) Vector aceleración:

Análogamente, si aplicamos el empleo del punto para representar la derivada respecto del tiempo, podemos igualmente reescribir el vector aceleración de la partícula, así:

$$\vec{a} = \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\imath} + \ddot{z}\hat{\imath} \tag{1.9}$$

Con lo cual también podemos reescribir la velocidad y la aceleración, así:

$$\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k} \tag{1.10}$$

Y también,

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k} \tag{1.11}$$

Igualmente,

$$\vec{a} = \dot{v}_x\hat{\imath} + \dot{v}_y\hat{\jmath} + \dot{v}_z\hat{k} \tag{1.12}$$

Como la aceleración instantánea de la partícula P, está determinada por la primera derivada de la velocidad instantánea y la segunda derivada del vector de posición, respecto del tiempo, entonces podemos escribir:

$$\vec{a}_P = \frac{d}{dt}\left\{\frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dx}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dx}{dt}\hat{k}\right\} \tag{1.13}$$

Desarrollando la ecuación anterior y teniendo en cuenta,

$$\frac{d\hat{\imath}}{dt} = \frac{d\hat{\jmath}}{dt} = \frac{d\hat{k}}{dt} = 0 \tag{1.14}$$

Se tiene que:

$$\vec{a}_P = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k} \tag{1.15}$$

En forma equivalente,

$$\vec{a}_P = \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} + \ddot{z}k \tag{1.16}$$

O también,

$$\vec{a}_P = a_{Px}\hat{\imath} + a_{Py}\hat{\jmath} + a_{Pz}\hat{k} \tag{1.17}$$

Descripción intrínseca o absoluta del movimiento

En algunos tipos de movimiento curvilíneo, muy especialmente en el movimiento circular de una partícula, las componentes normal y tangencial de la velocidad y de la aceleración, suelen proporcionar una descripción más útil del movimiento, que las coordenadas rectangulares.

La posición de una partícula en movimiento, que describe una curva cualquiera se determina, cuando conocemos su trayectoria y además la distancia $s = s(t)$, medida entre un punto fijo de la curva y la posición de la partícula a esta distancia es lo que llamamos coordenada curvilínea. Para una partícula P con trayectoria curvilíneaΓ. Ver la figura 2 que se muestra a continuación:

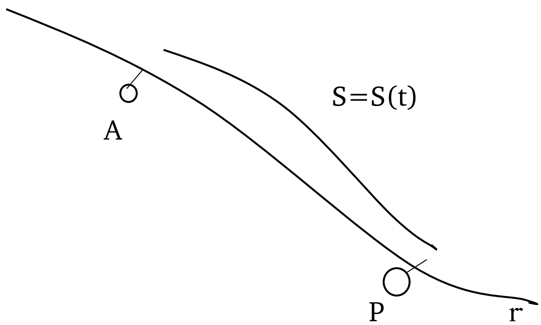


Figura 2. Movimiento curvilíneo de la partícula
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Donde:

S(t): Coordenada curvilínea o coordenada Intrínseca

$\overrightarrow{AP}(t) = \vec{r}(t)$: Vector de posición de la partícula P, respecto de la posición A

En cada punto de la curva Γ es posible trazar una circunferencia tangente a la misma. En consecuencia, el centro de la referida circunferencia tangente en cada punto de la curva recibe el nombre de centro de curvatura y el radio de dicha circunferencia tangente se denotará por ρ y se llama radio de curvatura.

En cada punto de la curva de la figura 3 se puede determinar una dirección tangente y una dirección normal. En vista de esto, es posible definir en cada punto de la curva una terna de vectores unitarios: $\{\hat{e}_t, \hat{e}_n, \hat{e}_b\}$.

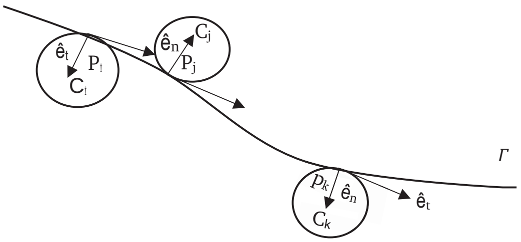


Figura 3. Dirección tangente y normal de la partícula
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Siendo,

$\hat{e}_t$: Vector unitario tangente a la trayectoria. Este vector es positivo en el sentido del recorrido de la curva.

$\hat{e}_n$: Vector unitario normal a la trayectoria. Este vector es positivo cuando apunta al centro de curvatura correspondiente.

$\hat{e}_b$: Vector unitario binormal. El cual debe satisfacer la siguiente condición.

$$\vec{e}_b = \hat{e}_n x \hat{e}_t$$

$\hat{e}_t \ \hat{e}_n$, Definen el Plano osculador. El vector $\vec{a}_p$ está siempre contenido en el plano osculador.

Es evidente, que los vectores unitarios arriba descritos poseen derivada con respecto al tiempo (son una función del tiempo), ya que su dirección, varía en general en cada instante del movimiento.

Vector Velocidad de P

Considérese que la partícula P se desplaza desde la posición P_1 a la posición P_2 recorriendo la longitud de arco Δ_s en el tiempoΔ_t. Por definición, la rapidez promedio será:

$$V_m = \frac{\Delta_s}{\Delta_t} \tag{1.18}$$

Ilustremos gráficamente el proceso de movilidad de la partícula, tal como lo muestra la figura 4.

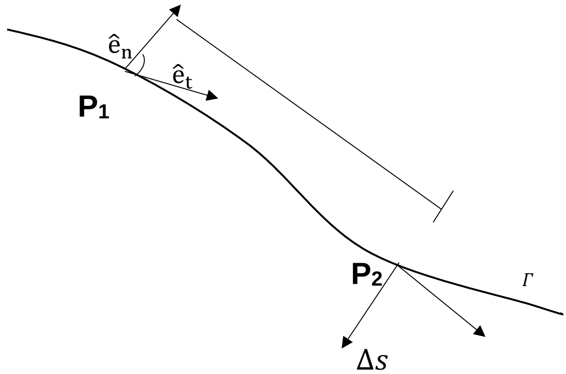


Figura.4 velocidad de la partícula
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

a) Velocidad instantánea

La magnitud de la velocidad instantánea viene dada por:

$$V_P = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \dot{S} \qquad \hat{e}_n + \Delta_{\hat{e}_n} \qquad \hat{e}_t + \Delta_{\hat{e}_t} \tag{1.19}$$

Expresando vectorialmente la ecuación:

$$\vec{V}_P = \dot{S}\hat{e}_t \tag{1.20}$$

La ecuación vectorial escrita arriba representa el vector velocidad instantánea de la partícula P en forma intrínseca y la misma puede reescribirse así:

$$\vec{V}_P = V_P\hat{e}_t \tag{1.21}$$

b) Aceleración instantánea

Por Definición:

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{V}_P}{dt} \tag{1.22}$$

Por lo tanto,

$$\vec{a}_P = \frac{d}{dt}\left(\dot{S}\hat{e}_t\right) = \ddot{S}\hat{e}_t + \dot{S}\frac{d\hat{e}_t}{dt} \tag{1.23}$$

Evaluación de $\frac{d\hat{e}_t}{dt}$:

El ángulo formado por las tangentes en P_1 y P_2 es igual al ángulo entre los dos radios de curvatura. Gráficamente, Ver figura 5:

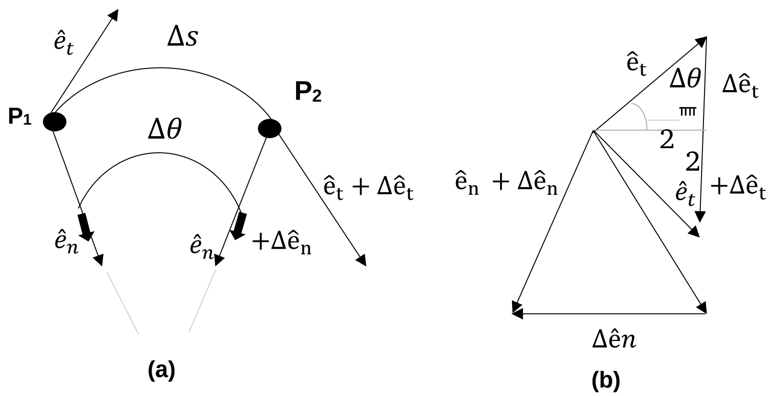


Figura 5 Aceleración instantánea
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Podemos observar que los vectores unitarios $\hat{e}_t$ y $(\widehat{e}_t + \Delta\hat{e}_t)$ de la parte (b) de la figura, forman un Δ isósceles de magnitud igual a la unidad. Por lo tanto, el cambio de $\hat{e}_t$, igual que $\hat{e}_n$ es en su dirección y no en su magnitud. En consecuencia,

$$|\Delta\hat{e}_t| = \Delta\hat{e}_t = 2\left(\hat{e}_t \sin\frac{\Delta\theta}{2}\right) = 2(1)\sin\frac{\Delta\theta}{2}$$

Para $\Delta\theta$ muy pequeño se, tiene que:

$$\sin\frac{\Delta\theta}{2} = \frac{\Delta\theta}{2}$$

$$\Delta\hat{e}_t = 2\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$$

Lo que implica que,

$$\Delta\hat{e}_t = \Delta\theta$$

También, como la derivada de un vector de magnitud constante es perpendicular al vector (teorema), entonces podernos concluir, que $\frac{d\hat{e}_t}{dt}$ es un vector perpendicular al vector unitario, $\hat{e}_t$ y por lo tanto, tiene la misma dirección del vector $\hat{e}_n$.

En consecuencia, tenemos que:

$$\frac{d\hat{e}_t}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\hat{e}_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\hat{e}_n = \frac{d\theta}{dt}\hat{e}_n$$

Por lo tanto,

$$\frac{d\hat{e}_t}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{e}_n = \dot{\theta}\hat{e}_n \qquad (1.24)$$

Análogamente podemos demostrar que,

$$\frac{d\hat{e}_n}{dt} = \dot{\theta}\hat{e}_t \qquad (1.25)$$

$\dot{\theta}$: Debe expresarse en radianes por unidad de tiempo.

Negativa la derivada de $\frac{d\hat{e}_n}{dt}$ porque la dirección de $\Delta\hat{e}_n$ en opuesta a la de $\hat{e}_t$ Reemplazando,

$$\vec{a} = \ddot{S}\hat{e}_t + \dot{S}\dot{\theta}\hat{e}_n \qquad (1.26)$$

También, según el esquema (a) al aproximarse $\Delta\theta$ a cero, la longitud del arco se hace igual a ds. Por lo tanto:

$$d\theta = \frac{dS}{\rho} \;\Rightarrow dS = \rho d\theta \qquad (1.27)$$

Si dividimos por dt ambos miembros,

$$\frac{dS}{dt} = \rho\frac{d\theta}{dt} \qquad (1.28)$$

Por lo tanto,

$$V = \dot{S} = \rho\dot{\theta} \qquad (1.29)$$

De donde se obtiene que,

$$\left.\begin{array}{c} \dot{S} = \rho\dot{\theta} \\ \dot{S} = V = \rho\dot{\theta} \\ \dot{\theta} = \frac{\dot{S}}{\rho} = \frac{V}{\rho} \end{array}\right\} \qquad (1.30)$$

Reemplazando obtenemos finalmente, las siguientes expresiones para la aceleración de la partícula *p*:

$$\begin{aligned} \vec{a}_P &= \ddot{S}\hat{e}_t + \frac{\dot{S}^2}{\rho}\hat{e}_n \\ \vec{a}_P &= \ddot{S}\hat{e}_t + \rho\dot{\theta}^2\hat{e}_n \qquad (1.31) \\ \vec{a}_P &= \ddot{S}\hat{e}_t + \frac{V^2}{\rho}\hat{e}_n \end{aligned}$$

Resumiendo,

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{Pt} + \vec{a}_{Pn} \qquad (1.32)$$

Donde:

$\vec{a}_{Pt}$: Es la componente tangencial de la aceleración de la partícula P.

$\vec{a}_{Pn}$: Es la componente normal de la aceleración de la partícula P.

Conclusión

En el movimiento curvilíneo, debe cumplirse que:

- La velocidad tiene la magnitud $\dot{S}$ y su dirección es la de $\hat{e}_t$

- La aceleración de la partícula P tiene dos componentes:

- Componente tangencial $\vec{a}_{Pt}$ de magnitud $\ddot{s}$ y con dirección igual a la de $\hat{e}_t$
- Componente normal $\vec{a}_{Pn}$ de magnitud $\rho\dot{\theta}^2 = \frac{V^2}{\rho} = \frac{\dot{S}^2}{\rho}$ y su dirección es la misma que la del radio de curvatura, Esta componente se debe al cambio de dirección de la velocidad.

Nótese que:

$$a_P = \sqrt{\ddot{S}^2 + \left(\frac{\dot{S}^2}{\rho}\right)^2} = \sqrt{\ddot{S}^2 + \left(\frac{V^2}{\rho}\right)^2} = \sqrt{\ddot{S}^2 + \left(\rho\dot{\theta}^2\right)^2}$$

Movimiento Circular de una Partícula

Considérese la partícula P que describe una trayectoria circular de radio r, con el origen de coordenadas en el centro O de la circunferencia. Si se considera el arco $AB = S$ es el tramo de la trayectoria recorrida por la partícula. Ver la figura (6).

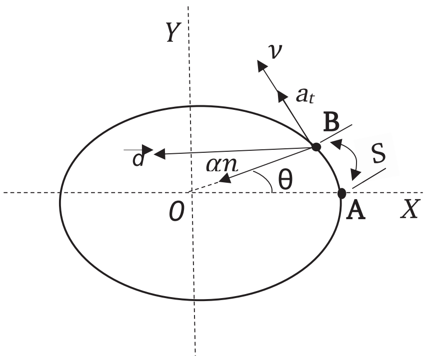


Figura 6 Movimiento circular de P
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

De la figura 6 se obtiene que,

$$\theta = \frac{\overset{\frown}{AB}}{r} = \frac{S}{r} \qquad \Rightarrow S = r\theta$$

Y, por consiguiente, la velocidad (rapidez) que es tangente a la circunferencia está determinada por,

$$v = \frac{dS}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \tag{1.33}$$

De la misma manera, las componentes de la aceleración pueden ser calculadas, así:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{1.34}$$

Y

$$a_n = \frac{v^2}{r} = r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \tag{1.35}$$

También, la derivada del ángulo θ respecto del tiempo, se define como la velocidad angular ω. Por lo tanto,

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Es bueno observar, que el ángulo θ define en forma única el radio vector OB, por lo que se dirá que ω es la velocidad angular del radio OB = r. En este contexto no tiene sentido hablar de la velocidad angular de un punto, sino de la velocidad angular del radio OB = r. De todo lo anterior se deduce que:

a) Velocidad:

$$v = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega \tag{1.36}$$

b) Aceleración:

$$a_t = r\frac{d\omega}{dt} \tag{1.37}$$

$$a_n = r\omega^2 \tag{1.38}$$

Problema ilustrativo 1

Una partícula P se desplaza en línea recta con una aceleración constante a_0, como lo muestra la figura 7. Sabiendo que en el instante $t = t_0$ la partícula se encuentra en un punto de abscisa x_0 y que su velocidad instantánea en esa posición es de v_0. Se pide determinar la ley del movimiento.

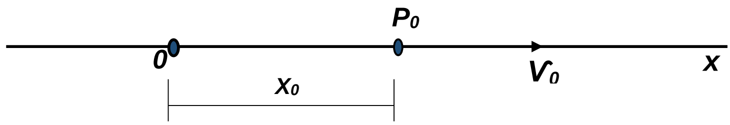


Figura 7. Movimiento en línea recta de la partícula
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Es evidente, que la posición de la partícula P queda determinada mediante una sola variable. En consecuencia, el movimiento es de la clase unidimensional. Por lo tanto,

$$x = x(t)$$

Es claro, que los distintos parámetros del movimiento se reducen a relaciones que pueden expresarse mediante fórmulas que relacionan magnitudes escalares. En efecto,

$$\ddot{x} = a_0 \quad ; \quad \ddot{y} = 0 \quad y \quad z = 0$$

Dado que la aceleración por definición es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo, sus respectivas componentes pueden ser expresadas, así:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = a_0 \quad ; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = 0 \quad ; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = 0$$

Integrando las expresiones anteriores, se obtiene:

$$v_x = a_0 t + C_1 \; ; \quad v_y = C_2 \; ; \quad y \quad v_z = C_3$$

Para determinar los valores de las constantes de integración C_1, C_2 y C_3 se establecen obviamente, las *condiciones iniciales*, para el instante $t = t_0$, así:

$$v_x = v_0; \qquad v_y = 0; \qquad v_z = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$x = x_0 \; ; \qquad y = 0 \; ; \qquad z = 0 \qquad \text{(b)}$$

Reemplazando en las ecuaciones (a):

$$v_0 = a_0 t + C_1 \; ; \quad 0 = C_2 \; ; \quad 0 = C_3$$

Por lo tanto,

$$v_x = a_0(t - t_0) + v_0 \; ; \qquad v_y = 0 \; ; \qquad v_z = 0$$

Para determinar la ecuación del movimiento debemos tener en cuenta, que en general:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Aplicando esta definición para el movimiento unidimensional de la partícula *P* e integrando, queda:

$$x = \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2 + v_0 t + B_1; \quad y = B_2 \quad y \quad z = B_3$$

Utilizando el grupo de ecuaciones (b) determinadas por las *condiciones iniciales*, se tiene que,

$$x_0 = v_0 t_0 + B_1; \qquad 0 = B_2, \qquad 0 = B_3$$

Y, por último,

$$x = \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + x_0$$

$$y = 0$$

$$z = 0$$

Problema ilustrativo 2

El movimiento de una partícula *P* se realiza sobre una circunferencia de radio *R*. El movimiento se describe en forma intrínseca. Su abscisa curvilínea con origen en *A* es:

$$S = Rt^2$$

a) Se pide encontrar la velocidad y la aceleración de la partícula.
b) Calcular las componentes de la velocidad y de la aceleración sobre los ejes $\{Oxy\}$ de la figura 8.

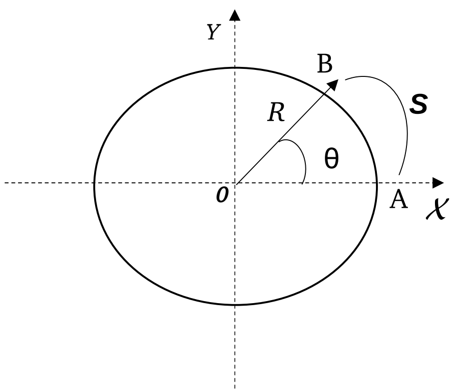


Figura 8. Movimiento de una partícula sobre la circunferencia
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Solución

La magnitud de la velocidad viene dada por:

$$v = \frac{dS}{dt} = 2Rt \qquad \text{(a)}$$

Obviamente, la velocidad en el punto *B* es tangente a la trayectoria. Y las dos componentes de la aceleración vienen dadas por:

a) Componente tangencial

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 2R$$

b) Componente normal

$$a_n = \frac{v^2}{R} = 4Rt^2$$

Para encontrar las componentes según los ejes, determinamos primeramente el vector de posición,

$$\vec{r} = R\cos\theta\,\hat{\imath} + R\sin\theta\,\hat{\jmath}$$

Pero,

$$\theta = \frac{S}{R} \quad \text{(expresando a } \theta \text{ en radianes)}$$

Por lo tanto,

$$\vec{r} = R\cos\frac{S}{R}\hat{\imath} + R\sin\frac{S}{R}\hat{\jmath}$$

De donde,

$$\vec{r} = R\cos\frac{Rt^2}{R}\hat{\imath} + R\sin\frac{Rt^2}{R}\hat{\jmath} = R\cos t^2\,\hat{\imath} + R\sin t^2\,\hat{\jmath}$$

a) Velocidad

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -2Rt\sin t^2\,\hat{\imath} + 2Rt\cos t^2\,\hat{\jmath}$$

b) Aceleración

$$\vec{a} = (-2R\sin t^2 - 4Rt^2\cos t^2)\hat{\imath} + (2R\cos t^2 - 4Rt\sin t^2)\hat{\jmath}$$

CAPÍTULO II

Cinemática de los Sistemas de Referencias Rígidos

Hasta ahora, hemos estudiado con cierto nivel de detalles, el movimiento de una partícula P, medido desde un sistema de referencia fijo. Ahora, nos disponemos a generalizar el estudio del movimiento de una partícula en el espacio tridimensional; y más aún abordaremos la mecánica conociendo otras clases de movimiento en un contexto más universal. Es decir, estudiaremos el movimiento de una partícula localizada en un sistema de coordenadas el cual, también se mueve y que bautizaremos con el nombre de sistema relativo. Que se mueve respecto de otro sistema de coordenadas, que, en adelante, llamaremos: Sistema de coordenadas fijo o absoluto o inercial. Esta clase de análisis del movimiento resulta ser de gran interés ya que el mismo se describe a través del rigor matemático.

Para dar comienzo a nuestra fascinante aventura en el mundo de la cinemática, considérese un sistema de coordenadas ortonormal {oxyz} el cual tiene asociada una terna de vectores unitarios $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$, que por conveniencia lo consideramos fijo. En consecuencia, en dicho sistema se satisface la siguiente condición:

$$\frac{d\hat{\imath}}{dt} = \frac{d\hat{\jmath}}{dt} = \frac{d\hat{k}}{dt} = \vec{\theta} \tag{2.1}$$

Considérese también, otro sistema de coordenadas rígido $\{O, X, Y, Z\}$ en movimiento respecto de $\{oxyz\}$, al cual le corresponde la terna de vectores unitarios $\{\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}\}$. Este último sistema es conocido como un sistema móvil rígido (indeformable).

Un sistema relativo (sistema de coordenadas móvil) $\{O, X, Y, Z\}$ es una clase de sistema de referencia, que se caracteriza porque durante su movimiento, respecto al sistema de coordenadas fijo $\{oxyz\}$ se satisfacen las siguientes propiedades:

$$\hat{I}.\hat{J} = 0$$
$$\hat{J}.\hat{K} = 0$$
$$\hat{K}.\hat{I} = 0$$

Las tres expresiones arriba escritas son conocidas como las condiciones de rigidez que debe satisfacer todo sistema de coordenadas móvil o sistema relativo.

Derivando las condiciones de rigidez de los sistemas de referencia relativo respecto del parámetro tiempo calculadas por un observador localizado en el sistema de coordenadas absoluto o fijo {oxyz}.

$$\frac{d}{dt}(\hat{I}.\hat{J}) = \frac{d\hat{I}}{dt}.\hat{J} + \hat{I}.\frac{d\hat{J}}{dt} = 0 \tag{2.2}$$

De donde se deduce que,

$$\frac{d\hat{I}}{dt}.\hat{J} = -\hat{I}.\frac{d\hat{J}}{dt} = w_z \tag{a}$$

$$\frac{d}{dt}(\hat{J}.\hat{K}) = \frac{d\hat{J}}{dt}.\hat{K} + \hat{J}.\frac{d\hat{K}}{dt} = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{d\hat{J}}{dt}.\hat{K} = -\hat{J}.\frac{d\hat{K}}{dt} = w_x \tag{b}$$

Igualmente,

$$\frac{d}{dt}(\hat{K}.\hat{I}) = \frac{d\hat{K}}{dt}.\hat{I} + \hat{I}.\frac{d\hat{K}}{dt} = 0 \tag{2.4}$$

$$\frac{d\hat{K}}{dt}.\hat{I} = -\hat{I}.\frac{d\hat{K}}{dt} = w_y \tag{c}$$

Es muy importante, tener en cuenta, que los parámetros escalares w_x, w_y y w_z *s*e pueden expresar en la forma:

$$w_x = w_x(t)\,; \quad w_y = w_y(t)\,; \quad w_z = w_z(t) \tag{2.5}$$

Lo que se interpreta físicamente como, que los parámetros w_x, w_y y w_z son funciones escalares que dependen del tiempo.

Componentes rectangulares de los vectores: $\frac{d\hat{I}}{dt}, \frac{d\hat{J}}{dt}, \frac{d\hat{K}}{dt}$ en el Sistema de Referencia Relativo $\{O, X, Y, Z\}$

Componentes rectangulares de los vectores-derivados:

$$\frac{d\hat{I}}{dt} = \left(\frac{d\hat{I}}{dt}.\hat{I}\right)\hat{I} + \left(\frac{d\hat{I}}{dt}.\hat{J}\right)\hat{J} + \left(\frac{d\hat{I}}{dt}.\hat{K}\right)\hat{K}$$

$$\frac{d\hat{J}}{dt} = \left(\frac{d\hat{J}}{dt}.\hat{I}\right)\hat{I} + \left(\frac{d\hat{J}}{dt}.\hat{J}\right)\hat{J} + \left(\frac{d\hat{K}}{dt}.\hat{K}\right)\hat{K} \tag{2.6}$$

$$\frac{d\hat{K}}{dt} = \left(\frac{d\hat{K}}{dt}.\hat{I}\right)\hat{I} + \left(\frac{d\hat{K}}{dt}.\hat{J}\right)\hat{J} + \left(\frac{d\hat{K}}{dt}.\hat{K}\right)\hat{K}$$

Recordemos, que existe un teorema, que expresa que la derivada de un vector de magnitud constante, respecto de un parámetro escalar, es siempre perpendicular al vector. En consecuencia, podemos expresar los valores de algunos términos de las expresiones vectoriales de arriba, de la siguiente manera:

$$\frac{d\hat{I}}{dt}.\hat{I} = \frac{d\hat{J}}{dt}.\hat{J} = \frac{d\hat{K}}{dt}.\hat{K} = 0 \tag{2.7}$$

Si sustituimos en estas expresiones los parámetros escalares w_x, w_y y w_z que son funciones del tiempo, resulta:

$$\frac{d\hat{I}}{dt} = w_z\hat{J} - w_y\hat{K}$$

$$\frac{d\hat{J}}{dt} = w_x\hat{K} - w_z\hat{I} \tag{2.8}$$

$$\frac{d\hat{K}}{dt} = w_y\hat{I} - w_x\hat{J}$$

Definición

Se define el vector velocidad angular instantánea de un sistema de coordenadas móvil respecto del sistema de referencia {oxyz} (sistema de referencia: fijo o inercial o absoluto) a la cantidad vectorial que se denota por $\vec{w}$; y que se determina matemáticamente por:

$$\vec{w} = w_x\hat{I} + w_y\hat{J} + w_z\hat{K} \tag{2.9}$$

Por otra parte, también tenemos que,

$$\hat{I}.\hat{I} = 1 \tag{2.10}$$

$$\hat{J}.\hat{J} = 1$$

$$\hat{K}.\hat{K} = 1$$

Si ahora derivamos las expresiones anteriores respecto del parámetro tiempo, se obtiene:

$$\frac{d}{dt}\left(\hat{I}.\hat{I}\right) = \frac{d\hat{I}}{dt}.\hat{I}.\frac{d\hat{I}}{dt} = 0$$

Por lo tanto,

$$2\frac{d\hat{I}}{dt}.\hat{I} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\hat{I}}{dt}.\hat{I} = 0 \quad \text{(teorema)}$$

Análogamente,

$$\frac{d\hat{J}}{dt}.\hat{J} = 0 \quad \text{(teorema)}$$

$$\frac{d\hat{K}}{dt}.\hat{K} = 0 \quad \text{(teorema)}$$

Las ecuaciones anteriores nos demuestran, el teorema de la derivada de un vector de magnitud constante, con respecto a cualquier parámetro es perpendicular al vector.

Derivada de un vector localizado en un sistema de coordenadas móvil

A continuación, nos proponemos calcular la derivada respecto del tiempo de una función vectorial $\vec{Q}(t)$. Siendo $\vec{Q}$ un vector localizado en el sistema móvil $\{O, X, Y, Z\}$ con terna de vectores unitarios $\{\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}\}$, el cual se mueve, respecto al sistema de referencia fijo {oxyz}.

Veamos la ilustración gráfica de la figura 9:

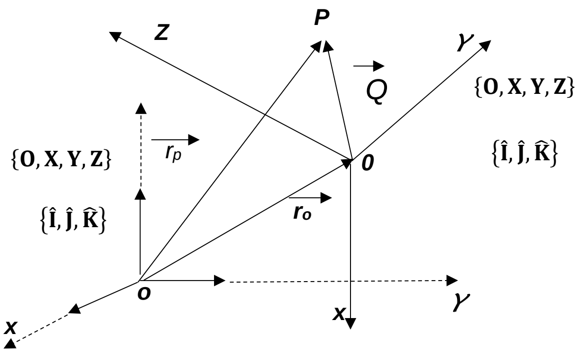


Figura 9. Derivada de un Vector Localizado en un Sistema Relativo
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza. 2019.

La función vectorial $\vec{Q} = \vec{Q}(t)$ se puede expresar en las coordenadas del sistema relativo que son en general X, Y, Z. Por lo tanto podemos expresar que:

$$\vec{Q} = X\hat{I} + Y\hat{J} + Z\hat{K} \tag{2.11}$$

Convencimiento: Las derivadas $\frac{d\vec{Q}}{dt}$ y $\frac{\partial\vec{Q}}{\partial t}$ son respectivamente, las derivadas calculadas por un observador ubicado en el sistema fijo {oxyz} $\left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)$ y la derivada respecto al tiempo, calculada por un observador localizado en el sistema móvil o sistema relativo $\{O, X, Y, Z\}$ $\left(\frac{\partial\vec{Q}}{\partial t}\right)$.
En consecuencia, podemos escribir,

$$\vec{Q} = X\hat{I} + Y\hat{J} + Z\hat{K} \tag{2.12}$$

Es evidente, que, para un observador ubicado en el sistema de coordenadas fijo o inercial, se cumple que:

$$X = X(t)\,; \quad Y = Y(t)\,; \quad Z = Z(t) \tag{2.13}$$

Como también,

$$\hat{I} = \hat{I}(t)\,; \quad \hat{J} = \hat{J}(t)\,; \quad \hat{K} = \hat{K}(t) \tag{2.14}$$

Calculando la derivada respecto del tiempo, de la función vectorial $\vec{Q} = \vec{Q}(t)$ por un observador localizado en el sistema fijo, se obtiene,

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \left(X\frac{d\hat{I}}{dt}\right) + \left(Y\frac{d\hat{J}}{dt}\right) + \left(Z\frac{d\hat{K}}{dt}\right) + \left(\frac{dX}{dt}\hat{I} + \frac{dY}{dt}\hat{J} + \frac{dZ}{dt}\hat{K}\right) \tag{2.15}$$

Pero,

$$\frac{d\hat{I}}{dt} = w_z\hat{J} - w_y\hat{K}$$

$$\frac{d\hat{J}}{dt} = w_x\hat{K} - w_z\hat{I}\ ; \quad \frac{d\hat{K}}{dt} = w_y\hat{I} - w_x\hat{J} \tag{2.16}$$

Reemplazando, estas derivadas en la derivada absoluta de la función vectorial, queda:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = X\left(w_z\hat{J} - w_y\hat{K}\right) + Y\left(w_x\hat{K} - w_z\hat{I}\right) + Z\left(w_y\hat{I} - w_x\hat{J}\right) + \left(\frac{dX}{dt}\hat{I} + \frac{dY}{dt}\hat{J} + \frac{dZ}{dt}\hat{K}\right) \tag{2.17}$$

Escribiendo en forma matricial

$$X\left(w_z\hat{J} - w_y\hat{K}\right) + Y\left(w_x\hat{K} - w_z\hat{I}\right) + Z\left(w_y\hat{I} - w_x\hat{J}\right) = \begin{bmatrix} \hat{I} & \hat{J} & \hat{K} \\ w_x & w_y & w_z \\ X & Y & Z \end{bmatrix}$$

Reescribiendo la expresión de la derivada absoluta de la función vectorial, resulta,

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \begin{bmatrix} \hat{I} & \hat{J} & \hat{K} \\ w_x & w_y & w_z \\ X & Y & Z \end{bmatrix} + \left(\frac{dX}{dt}\hat{I} + \frac{dY}{dt}\hat{J} + \frac{dZ}{dt}\hat{K}\right) \tag{2.18}$$

O en forma equivalente, pero más compacta,

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{w} \times \vec{Q} + \left(\frac{dX}{dt}\hat{I} + \frac{dY}{dt}\hat{J} + \frac{dZ}{dt}\hat{K}\right) \tag{2.19}$$

Pero también, se tiene que, para un observador ubicado en el sistema móvil $\{O, X, Y, Z\}$, el segundo término del segundo miembro de la ecuación puede interpretarse como la derivada de la función vectorial $\vec{Q} = \vec{Q}(t)$ con respecto al tiempo, o sea $\frac{\partial\vec{Q}}{\partial t}$,

$$\frac{\partial\vec{Q}}{\partial t} = \left(\frac{dX}{dt}\hat{I} + \frac{dY}{dt}\hat{J} + \frac{dZ}{dt}\hat{K}\right) \tag{2.20}$$

Por lo tanto, podemos concluir que si se tiene una función vectorial de la clase $\vec{Q} = \vec{Q}(t)$ localizada en una referencia móvil como la $\{O, X, Y, Z\}$ girando a una velocidad angular $\vec{w}$ alrededor del sistema de coordenadas fijo $\{oxyz\}$, entonces podemos expresar que:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{w} \times \vec{Q} + \frac{\partial \vec{Q}}{\partial t} \qquad (2.21)$$

En donde, $\frac{\partial \vec{Q}}{\partial t}$ representa la derivada relativa del vector $\vec{Q}(t)$ ubicada en el sistema móvil rígido.

La expresión vectorial $\frac{d\vec{Q}}{dt}$ es llamada la Ley Fundamental de la Cinemática, la cual se constituye como una ley que revela muchas particularidades interesantes. Es el caso, cuando este principio se utiliza para particularizar las propiedades de la terna de vectores unitarios $\{\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}\}$ de las que se obtienen las relaciones de Poisson.

Relaciones de Poisson

Aplicando la Ley Fundamental de la Cinemática a cada uno de los vectores $\{\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}\}$ de la terna de vectores unitarios, se obtiene,

$$\frac{d\hat{I}}{dt} = \vec{w} \times \hat{I} + \frac{\partial \hat{I}}{\partial t}$$

$$\frac{d\hat{J}}{dt} = \vec{w} \times \hat{J} + \frac{\partial \hat{J}}{\partial t}$$

$$\frac{d\hat{K}}{dt} = \vec{w} \times \hat{K} + \frac{\partial \hat{K}}{\partial t}$$

Pero sabemos que,

$$\frac{\partial \hat{I}}{\partial t} = \frac{\partial \hat{J}}{\partial t} = \frac{\partial \hat{K}}{\partial t} = \vec{\theta}$$

Ya que, todas las derivadas anteriores son nulas para un observador ubicado en $\{O, X, Y, Z\}$.

De donde se desprenden las relaciones de Poisson:

$$\frac{d\hat{I}}{dt} = \vec{w} \times \hat{I} = w_z\hat{J} - w_y\hat{K}$$

$$\frac{d\hat{J}}{dt} = \vec{w} \times \hat{J} = w_x\hat{K} - w_z\hat{I}$$

$$\frac{d\hat{K}}{dt} = \vec{w} \times \hat{K} = w_y\hat{I} - w_x\hat{J}$$

Cinemática del movimiento relativo

Aquí consideraremos una también un sistema de coordenadas fijo absoluto o inercial {oxyz}; y otro, sistema de referencia móvil o relativo $\{O, X, Y, Z\}$, pero ahora admitiremos que la partícula P se puede mover con respecto al sistema relativo. Ver la figura 10:

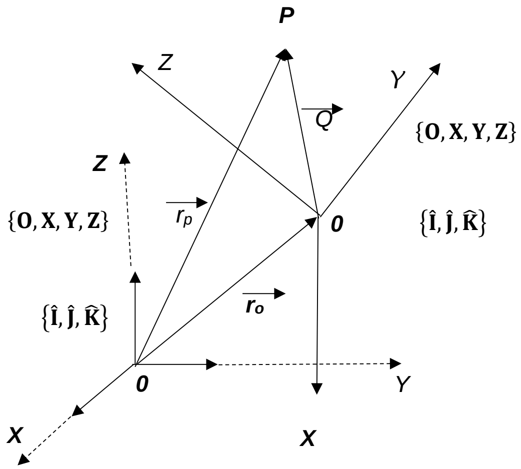


Figura 10. Movimiento de la partícula en un Sistema Relativo $\{O, X, Y, Z\}$
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Este concepto puede aplicarse, a una partícula P que se mueve con respecto a un cuerpo, que, a su vez, se mueve respecto al sistema fijo {oxyz}. Esta clase de aplicaciones son muy frecuentes en la ciencia moderna particularmente en el caso de mecanismos.

A manera de ilustración, mencionemos el flujo de fluido entre los álabes de una turbina, como también, este concepto nos permite modelar el movimiento de vaivén relativo de una biela en rotación. Igualmente, esta técnica nos permite estudiar el movimiento de los vientos y océanos con respecto al planeta tierra en rotación. Estos ejemplos científicos nos permiten ilustrar las distintas aplicaciones científicas de esta teoría.

Convendremos de llamar en adelante, al movimiento de P con respecto al sistema {oxyz}, "movimiento absoluto de P", de esta manera, podemos caracterizar su movimiento, así: 'velocidad absoluta y aceleración absoluta de P'. Mientras que al movimiento de P respecto al sistema $\{O, X, Y, Z\}$, lo designaremos como "movimiento relativo de P".

Es así, como un observador ligado o vinculado al sistema móvil $\{O, X, Y, Z\}$, bien podría considerar que es el sistema fijo {oxyz} el que se encuentra en movimiento respecto de él; y el mismo, en consecuencia, cambiaría el nombre de los parámetros aquí designados.

a) Vector Velocidad Absoluta

El estudio del movimiento de la partícula P, en los dos sistemas de coordenadas puede empezar con el análisis del vector de posición absoluto $\vec{r}_P$ de la partícula P, para ello, observamos la figura anterior; y por lo tanto, podemos escribir la siguiente expresión:

$$\vec{r}_P = \vec{r}_O + \vec{Q} \tag{2.22}$$

Siendo, $\vec{r}_P$ el vector de posición absoluto de la partícula P (respecto a la referencia $\{oxyz\}$); y $\vec{R}_P$, es el vector de posición relativo de la partícula referido al sistema de coordenadas $\{O, X, Y, Z\}$.

La función vectorial $\vec{Q} = \vec{Q}(t)$ es una función del tiempo, cuyas coordenadas en el sistema de referencia móvil rígido son respectivamente X, Y, Z. Se tendrá entonces que, para un observador ubicado en el sistema de coordenadas $\{O, X, Y, Z\}$. Por lo tanto, podemos expresar que,

$$\vec{Q} = X\hat{I} + Y\hat{J} + Z\hat{K} \tag{2.23}$$

Sin embargo, aquí se nos muestra una diferencia fundamental, ya que, en este caso, la partícula P se mueve con respecto, a los ejes OX, OY y OZ. En consecuencia, X, Y y Z serán automáticamente, funciones del tiempo. Adicionalmente, como antes, $\hat{I}, \hat{J}$ y $\hat{K}$ son igualmente funciones del tiempo, ya que el sistema de coordenadas $\{O, X, Y, Z\}$ se está moviendo con respecto al sistema de referencia absoluto $\{oxyz\}$.

Siendo así, procederemos a calcular la velocidad absoluta de la partícula P, por definición:

$$\vec{v}_P = \frac{d\vec{r}_P}{dt} = \frac{\vec{r}_O}{dt} + \frac{d\vec{Q}}{dt} \tag{2.24}$$

O en forma equivalente,

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \frac{d\vec{Q}}{dt} \tag{2.25}$$

Ahora, es evidente que la derivada $\frac{d\vec{Q}}{dt}$ merece un análisis digno de consideración. Partiendo de la ecuación vectorial, que determina la función vectorial $\vec{Q}$ y aplicando la definición de velocidad en general, tenemos que,

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = X\frac{d\hat{I}}{dt} + Y\frac{d\hat{J}}{dt} + Z\frac{d\hat{K}}{dt} + \frac{dX}{dt}\hat{I} + \frac{dY}{dt}\hat{J} + \frac{dZ}{dt}\hat{K} \tag{2.26}$$

Pero,

$$X = X(t); \quad Y = Y(t); \quad Z = Z(t); \quad \hat{I} = \hat{I}(t); \quad \hat{J} = \hat{J}(t); \quad \hat{K} = \hat{K}(t)$$

Aplicando las relaciones de Poisson, queda la siguiente expresión vectorial:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{w} \times \vec{Q} + \left(\frac{dX}{dt}\hat{I} + \frac{dY}{dt}\hat{J} + \frac{dZ}{dt}\hat{K}\right) \qquad (2.27)$$

Resulta conveniente ampliar aquí el marco de nuestra notación, de la siguiente manera,

$$\frac{\partial\vec{Q}}{dt} = \frac{dX}{dt}\hat{I} + \frac{dY}{dt}\hat{J} + \frac{dZ}{dt}\hat{K} \qquad (2.28)$$

Donde la notación, $\frac{\partial\vec{Q}}{dt}$ tiene como propósito recordar al lector que este término se calcula derivando el vector $\vec{Q}$ con respecto, al sistema de coordenadas móvil, $\{O, X, Y, Z\}$. Para este observador, los vectores unitarios son fijos. Por lo tanto, la expresión vectorial anterior se transforma en,

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{w} \times \vec{Q} + \frac{\partial\vec{Q}}{\partial t} \qquad (2.29)$$

Esta expresión será válida, siempre que exista movimiento relativo. El vector relativo $\frac{\partial\vec{Q}}{dt}$ tiene una interpretación digna de ser considerada. Como se ha dicho anteriormente, representa la variación del vector de posición relativo $\vec{Q}$, como si los vectores unitarios $\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}$ estuvieran fijos, esto es, representa la velocidad que mediría un observador solidario (fijo), en el sistema relativo $\{O, X, Y, Z\}$, vería a la partícula P. Por esta razón, el término $\frac{\partial\vec{Q}}{dt}$ se llama velocidad relativa $\vec{v}_r$ de la partícula. Esto es,

$$\vec{v}_r = \frac{\partial\vec{Q}}{\partial t} \qquad (2.30)$$

En consecuencia, podemos reescribir la derivada absoluta $(\frac{d\vec{Q}}{dt})$, como:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{w} \times \vec{Q} + \frac{\partial\vec{Q}}{\partial t} = \vec{w} \times \vec{Q} + \vec{v}_r \qquad (2.31)$$

Finalmente, podemos escribir la velocidad absoluta de la partícula P, así:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{w} \times \vec{Q} + \vec{v}_r \qquad (2.32)$$

Esta expresión vectorial es de gran importancia por su generalidad; y la misma, puede ser interpretada de la siguiente manera: Ya hemos visto que, la velocidad de una partícula P ubicada en el sistema relativo móvil rígido; y en reposo respecto de este sistema es:

$$\vec{v}_O + \vec{w} \times \vec{Q} = \vec{v}_t \qquad (2.33)$$

En adelante, llamaremos a la velocidad $\vec{v}_t$ “velocidad de transporte de la partícula”, por ser esta la velocidad que posee la partícula P en el sistema relativo o móvil, en el instante considerado. Pero dado que P se mueve a su vez con respecto a tal sistema con una velocidad relativa $\vec{v}_r$. Es evidente que, que la velocidad absoluta o total venga dada como la suma de la velocidad de transporte más la velocidad relativa, o sea:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_t + \vec{v}_r \tag{2.34}$$

De esta manera, hemos presentado el resultado final, en cuanto a la composición de las velocidades se refiere, de las leyes que rigen el movimiento relativo de una partícula.

Si analizamos en profundidad la ecuación vectorial que se muestra a continuación:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{w} \times \vec{Q} + \frac{\partial\vec{Q}}{\partial t}$$

Se puede ver como un vector cuyas componentes sobre $\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}$ que varían con el tiempo, puede también ser derivado. Por ejemplo, sea el caso de la misma velocidad relativa, que viene dada en general por:

$$\vec{v}_r = \frac{\partial\vec{Q}}{dt} = \frac{dX}{dt}\hat{I} + \frac{dY}{dt}\hat{J} + \frac{dZ}{dt}\hat{K} \tag{2.35}$$

En este caso, también $\frac{dX}{dt}, \frac{dY}{dt}$ y $\frac{dZ}{dt}$ son a su vez, funciones del tiempo; y así mismo, $\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}$. Luego, podemos generalizar y escribir:

$$\frac{d\vec{v}_r}{dt} = \vec{w} \times \vec{v}_r + \frac{\partial\vec{v}_r}{\partial t} \tag{2.36}$$

Siendo,

$$\frac{\partial\vec{v}_r}{\partial t} = \frac{\partial^2\vec{Q}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{d^2X}{dt^2}\hat{I} + \frac{d^2Y}{dt^2}\hat{J} + \frac{d^2Z}{dt^2}\hat{K} \tag{2.37}$$

b) Vector Aceleración Absoluta

El vector aceleración absoluta de la partícula P, se puede obtener aplicando la definición a partir de la derivada de la velocidad absoluta respecto del parámetro tiempo, así:

Vector Velocidad Absoluta

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d\vec{v}_O}{dt} + \frac{d\vec{w}}{dt} \times \vec{Q} + \vec{w} \times \frac{d\vec{Q}}{dt} + \frac{dv_r}{dt} \tag{2.38}$$

Siendo, obviamente,

$$\vec{a}_O = \frac{d\vec{v}_O}{dt} \tag{2.39}$$

Y

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{w}}{dt} \qquad \text{(Vector acelración angular del sistema } \{O, X, Y, Z\}\text{)}$$

La última expresión, recibe el nombre de aceleración angular del sistema de coordenadas móvil. En cuanto a las otras dos derivadas $\frac{d\vec{Q}}{dt}$ y $\frac{dv_r}{dt}$ deben ser también evaluadas ya que la partícula se mueve respecto al sistema móvil o relativo. Por consiguiente

$$\vec{a}_P = \vec{a}_O + \vec{\alpha} \times \vec{Q} + \vec{w} \times \left(\vec{w} \times \vec{Q}\right) + 2\vec{w} \times \vec{v}_r + \frac{\partial \vec{v}_r}{\partial t} \tag{2.40}$$

En este resultado el término $\frac{\partial \vec{v}_r}{\partial t}$ recibe el nombre de aceleración relativa de la partícula P

$$\vec{a}_r = \frac{\partial \vec{v}_r}{\partial t} \tag{2.41}$$

Ya que $\vec{a}_r = \frac{\partial \vec{v}_r}{\partial t}$ es la aceleración que tendría P para un observador solidario o ligado al sistema de coordenadas $\{O, X, Y, Z\}$. Agrupando términos esta ecuación se puede reescribir

$$\vec{a}_P = \vec{a}_O + \vec{\alpha} \times \vec{Q} + \vec{w} \times \left(\vec{w} \times \vec{Q}\right) + 2\vec{w} \times \vec{v}_r + \vec{a}_r \tag{2.42}$$

Esta es la ecuación vectorial completa de la aceleración absoluta de la partícula P con respecto al sistema de referencia absoluto o inercial o fijo. Para su exacta interpretación se puede recurrir nuevamente, al método consistente separando la componente de la aceleración de transporte o arrastre. En efecto, si se compara la ecuación vectorial anterior de la aceleración absoluta, se observa que se puede llamar aceleración de transporte $\vec{a}_t$ a la expresión vectorial:

$$\vec{a}_t = \vec{a}_O + \vec{\alpha} \times \vec{Q} + \vec{w} \times \left(\vec{w} \times \vec{Q}\right) \tag{2.43}$$

Por otra parte, para un observador localizado en el sistema móvil $\{O, X, Y, Z\}$, esto es la aceleración relativa, corresponde al término $\vec{a}_r$ como ya se ha expresado.

Queda pendiente interpretar un término $2\vec{w} \times \vec{v}_r$, que se le conoce con el nombre de aceleración de Coriolis, o sea,

$$\vec{a}_C = 2\vec{w} \times \vec{v}_r \tag{2.44}$$

Aclarada la notación completa, la aceleración total o absoluta resulta ser, el vector

$$\vec{a}_P = \vec{a}_t + \vec{a}_C + \vec{a}_r \tag{2.45}$$

Problema Ilustrativo 1

Una rueda de radio r_1 que tiene un rodete concéntrico de radio r_0, es jalada mediante un cordel, de tal manera, que el punto C más bajo del rodete se mueve con una velocidad v_C, y con una componente horizontal a_{CH} de la aceleración. Si en la posición indicada, un móvil colocado sobre la rueda en D empieza a moverse hacia el centro A con una velocidad v_r constante, se pregunta por la velocidad y aceleración de dicho móvil. Ver figura 11

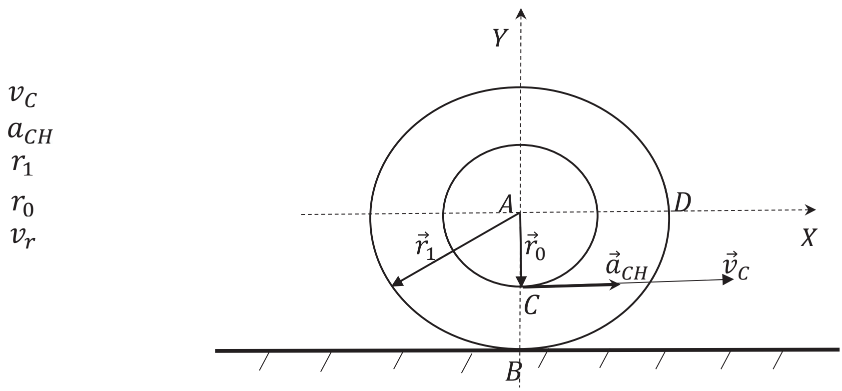


Figura 11. Velocidad y aceleración de un móvil
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Solución

Determinación del movimiento de A:

Velocidad:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{w} \times \overrightarrow{CA} \tag{1}$$

O también

$$\vec{v}_A = v_C\hat{I} + w\hat{K} \times r_0\hat{J} \tag{2}$$

Para calcular la velocidad angular de la rueda, antes debemos determinar la velocidad de B, que por ser un centro instantáneo de rotación podemos aseverar automáticamente, que es nula. Así:

$$\vec{v}_B = \vec{\theta} = v_C\hat{I} + w\hat{K} \times \left[-(r_1 - r_0)\hat{J}\right] \tag{3}$$

Por lo tanto,

$$v_C\hat{I} + w(r_1 - r_0)\hat{I} = [v_C + w(r_1 - r_0)]\hat{I} = \vec{\theta} \qquad (4)$$

En consecuencia,

$$v_C + w(r_1 - r_0) = 0 \qquad (5)$$

De donde se deduce,

$$w = -\frac{v_C}{r_1 - r_0} \qquad (6)$$

Reemplazando, (6) en la Ecuación vectorial (2), resulta:

$$\vec{v}_A = v_C\hat{I} + \frac{v_C r_0}{r_1 - r_0}\hat{I} \qquad (7)$$

Por consiguiente,

$$v_A = v_C\left(1 + \frac{r_0}{r_1 - r_0}\right) \qquad (8)$$

Aceleración:

Se sabe que la aceleración de A tiene la misma dirección de $\hat{I}$ por tratarse de una trayectoria lineal. Luego se tiene que,

$$a_A\hat{I} = \vec{a}_C + \vec{\alpha} \times \overrightarrow{CA} + \vec{w} \times \left(\vec{w} \times \overrightarrow{CA}\right) \qquad (9)$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$a_A\hat{I} = (a_{CH}\hat{I} + a_{CV}\hat{J}) + \alpha\hat{K} \times r_0\hat{J} + w\hat{K} \times \left(w\hat{K} \times r_0\hat{J}\right) \qquad (10)$$

En forma equivalente,

$$a_A\hat{I} = (a_{CH}\hat{I} + a_{CV}\hat{J}) - \alpha r_0\hat{I} - w^2 r_0\hat{J} \qquad (11)$$

Igualando los coeficientes de las componentes del vector (11):

$$\hat{I}: \quad a_A = a_{CH} - \alpha r_0 \qquad (a)$$

$$\hat{J}: \quad 0 = a_{CV} - w^2 r_0 \qquad (b)$$

La Ecuación (a) nos permite calcular la aceleración de A, una vez que se conozca la aceleración angular alfa (α). Mientras que la Ecuación (b) nos permite calcular la componente vertical (normal) de la aceleración de A, así:

$$a_{CV} = w^2 r_0 = \frac{v_C^2}{(r_1 - r_0)^2} r_0 \qquad (c)$$

Para determinar la aceleración angular alfa del sistema móvil rígido, recurrimos al cálculo de la aceleración absoluta de B, pero teniendo en cuenta que B solo tiene componente radial de la aceleración. Por lo tanto,

$$\vec{a}_B = a_B\hat{J} = \vec{a}_C + \vec{\alpha} \times \overrightarrow{CB} + \vec{w} \times \left(\vec{w} \times \overrightarrow{CB}\right) \tag{12}$$

O lo que es equivalente,

$$a_B\hat{J} = (a_{CH}\hat{I} + a_{CV}\hat{J}) + \alpha\hat{K} \times (-1)(r_1 - r_0)\hat{J} + w\hat{K}\left(w\hat{K} \times (-1)(r_1 - r_0)\hat{J}\right) \tag{13}$$

$$a_B\hat{J} = (a_{CH}\hat{I} + a_{CV}\hat{J}) + \alpha(r_1 - r_0)\hat{I} + w^2(r_1 - r_0)\hat{J} \tag{14}$$

Igualando los coeficientes de las componentes del vector (14):

$$\hat{I}: \qquad a_{CH} + \alpha(r_1 - r_0) = 0 \tag{d}$$

$$\hat{J}: \qquad a_{CV} + \ w^2(r_1 - r_0) \tag{e}$$

De la Ecuación (d), se obtiene,

$$\alpha = -\frac{a_{CH}}{(r_1 - r_0)} \tag{f}$$

En consecuencia, de (a):

$$a_A = a_{CH} + \frac{a_{CH}}{(r_1 - r_0)} r_0 \tag{g}$$

Por lo tanto,

$$\vec{a}_A = a_{CH}\left[1 + \frac{r_0}{r_1 - r_0}\right]\hat{I} \tag{15}$$

Determinación de los parámetros cinemáticos del móvil en D:

$$\vec{v}_D = \vec{v}_A + w\hat{K} \times \overrightarrow{AD} \ = v_A\hat{I} \ + w\hat{K} \times r_1\hat{I} \ + \vec{v}_r \tag{16}$$

Pero,

$$v_A = v_C\left(1 + \frac{r_0}{r_1 - r_0}\right)\hat{I} + wr_1\hat{J} + \vec{v}_r$$

Y,

$$\vec{v}_r = -v_r\hat{I}$$

Reemplazando en (16)

$$\vec{v}_D = \left[v_C\left(1 + \frac{r_0}{r_1 - r_0}\right) - v_r\right]\hat{I} - -\frac{v_C}{r_1 - r_0} r_1\hat{J} \tag{17}$$

$$\vec{a}_D = \vec{a}_A + \alpha\hat{K} \times r_1\hat{I} + w\hat{K} \times \left(w\hat{K} \times r_1\hat{I}\right) + 2w\hat{K} \times v_r\hat{I} + \vec{a}_r \tag{18}$$

Por lo tanto,

$$\vec{a}_D = a_{CH}\left[1+\frac{r_0}{r_1-r_0}\right]\hat{\imath} - \frac{a_{CH}}{(r_1-r_0)}r_1\hat{\jmath} - w^2 r_1\hat{\imath} + 2wv_r\hat{\jmath} \tag{19}$$

O en forma equivalente,

$$\vec{a}_D = a_{CH}\left[1+\frac{r_0}{r_1-r_0}\right]\hat{\imath} - \frac{a_{CH}}{(r_1-r_0)}r_1\hat{\jmath} - \left(\frac{v_C}{r_1-r_0}\right)^2 r_1\hat{\imath} + 2\frac{v_C}{r_1-r_0}v_r\hat{\jmath} \tag{20}$$

O sea,

$$\vec{a}_D = \left\{a_{CH}\left[1+\frac{r_0}{r_1-r_0}\right] - \left(\frac{v_C}{r_1-r_0}\right)^2 r_1\right\}\hat{\imath} + \left\{2\frac{v_C}{r_1-r_0}v_r - \frac{a_{CH}}{(r_1-r_0)}r_1\right\}\hat{\jmath} \tag{21}$$

O también,

$$\vec{a}_D = \left\{a_{CH}\left[1+\frac{r_0}{r_1-r_0}\right] - \frac{v_C^2}{(r_1-r_0)^2}r_1\right\}\hat{\imath} + \left\{2\frac{v_C}{r_1-r_0}v_r - \frac{a_{CH}}{(r_1-r_0)}r_1\right\}\hat{\jmath} \tag{22}$$

Problema Ilustrativo 2

Un rotor de radio r gira con una velocidad angular de magnitud constante $\vec{w}_r$ alrededor de un eje horizontal AB en sentido contrario al de las manecillas del reloj. A su vez, el eje AB gira alrededor de un eje vertical BC con una velocidad angular de magnitud constante $\vec{\Omega}$ en el sentido ubicado en la figura.

Se pide determinar los vectores velocidad y aceleración de un punto P de la periferia en el instante en que este se encuentra localizado arriba y en el centro del rotor, tal y como, lo muestra la figura 12.

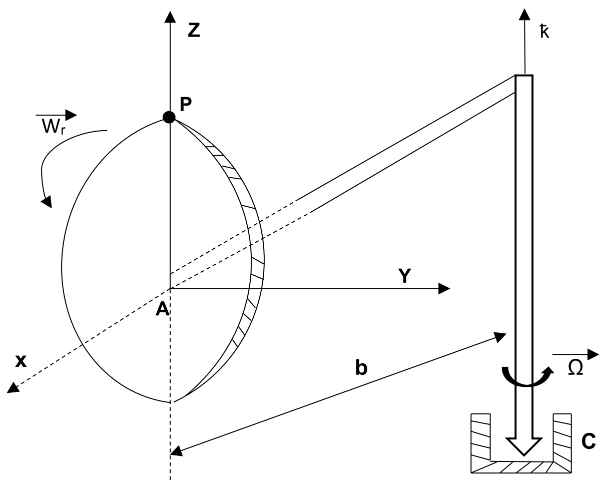


Figura 12. Velocidad y aceleración de un punto P en la periferia
Fuente: Mecánica, J. León, 1984.

Solución

Considere el sistema móvil rígido o relativo {AXYZ} solidario (fijo) al disco, de tal manera que, el AX sea en cada instante del movimiento, perpendicular al plano del disco; y además AZ pase por el punto P. Todo de tal modo, que para el instante considerado se cumpla que:

$\hat{I} = \hat{\imath}\,; \quad \hat{J} = \hat{\jmath}\,; \quad \hat{K} = \hat{k}$

a) Velocidad absoluta

La velocidad absoluta de del punto P viene dada por:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{w} \times \overrightarrow{AP} \tag{1}$$

Necesitamos calcular previamente la velocidad absoluta $\vec{v}_A$ utilizando un sistema relativo {BXYZ} solidario al brazo ABC.

$$\vec{v}_A = \vec{\Omega} \times b\hat{J} = \Omega\hat{K} \times b\hat{I} \tag{2}$$

Por lo tanto,

$$\vec{v}_A = \Omega b\hat{J} \tag{3}$$

Reemplazando (3) en la Ecuación vectorial (1)

$$\vec{v}_P = \Omega b\hat{J} + \left(\Omega\hat{K} + w_r\hat{I}\right) \times r\hat{K}\,\hat{J} \tag{4}$$

En consecuencia,

$$\vec{v}_P = (\Omega b - w_r r)\hat{J} \tag{5}$$

b) Aceleración absoluta

El punto A tiene una trayectoria circular que es horizontal; y el mismo se mueve con una velocidad angular constante $v_r\hat{I}$. Siendo así, la aceleración absoluta de la partícula P viene dada por:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \overrightarrow{AP} + \left(\Omega\hat{K} + w_r\hat{I}\right) \times \left(\left(\Omega\hat{K} + w_r\hat{I}\right) \times \overrightarrow{AP}\right) \tag{6}$$

Sistema móvil rígido {BXYZ}:

$$\vec{a}_A = \Omega\hat{K} \times \left(\Omega\hat{K} \times b\hat{I}\right) = -\Omega^2 b\hat{I} \tag{7}$$

Por definición, la aceleración angular absoluta y por aplicación de las relaciones de Poisson:

$$\vec{\alpha} = \frac{d}{dt}\left(\Omega\hat{K} + w_r\hat{I}\right) = w_r\frac{d\hat{I}}{dt} = w_r\Omega\hat{J} \tag{8}$$

Sustituyendo en la Ecuación (6)

$$\vec{a}_P = -\Omega^2 b\hat{I} + w_r\Omega\hat{J} \times r\hat{J} + \left(\Omega\hat{K} + w_r\hat{I}\right) \times \left(\left(\Omega\hat{K} + w_r\hat{I}\right) \times r\hat{J}\right) \tag{9}$$

$$\vec{a}_P = (2rw_r\Omega - b\Omega^2)\hat{I} - rw_r^2\hat{K} \tag{10}$$

CAPÍTULO III

Cinemática del movimiento de dos cuerpos rígidos

En un gran número de problemas de ingeniería la descripción del movimiento o la relación entre las fuerzas, puede llegar a ser más complicada que si el movimiento se refiere a un sistema fijo de referencia, mientras que, si el movimiento Se refiere a un sistema móvil rígido, su descripción y la relación entre las fuerzas se puede simplificar considerablemente. En tales casos, puede ser ventajosos tratar simultáneamente con un sistema de referencia móvil rígida y otro fijo para finalmente determinar el movimiento absoluto.

Definición

Dos cuerpos rígidos, están animados de movimiento relativo cuando el primero de ellos se mueve bajo una ley cualquiera y el segundo, además de tener el mismo movimiento que el primero posee otro movimiento particular que será exactamente, su movimiento relativ*o* respecto del primer cuerpo.

Si el problema tuviese mayor número de cuerpo rígido, éstos se estudiarán por parejas siempre y cuando se cumplan los requisitos señalados arriba. Si se diera el caso de que dos cuerpos rígidos no tengan movimiento común, no nos ocuparemos de ellos ya que realmente estarían animados de dos tipos de movimientos particulares y aun cuando tengan movimiento relativo el uno con respecto del otro, este caso no sería movimiento en el sentido que lo hemos definido aquí.

Estudio Cinemático del movimiento relativo

Para el estudio movimiento relativo debemos considerar en primer término un sistema de coordenadas móvil rígido solidario al primer cuerpo. Un observador ubicado en este Cuerpo podrá apreciar solamente el movimiento relativo del segundo. Esta consideración simplifica el estudio del movimiento relativo del segundo cuerpo respecto del primero. El sistema solidario al primer cuerpo sirve de puente para resolver el problema por un observador ubicado en un sistema inercial (sistema fijo) permitiéndoles de esta manera referir el movimiento del segundo cuerpo al sistema inercial.

Consideremos dos cuerpos rígidos, animados de movimiento relativo. Entonces ambos cuerpos se mueven bajo una misma ley respecto de un sistema fijo {oxyz} de terna de vectores unitarios $\left\{\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}\right\}$ (sistema cero), y además el cuerpo dos tiene un movimiento particular respecto del cuerpo uno (movimiento relativo). Solidario al cuerpo uno consideramos un sistema {OXYZ} de torna de vectores unitarios $\{\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}\}$ (sistema uno) de tal manera, que para el instante considerado, se cumpla que:

$$\hat{I} = \hat{\imath}, \hat{J} = \hat{\jmath}, \hat{K} = \hat{k}$$

Veamos la situación gráficamente, en la figura 13

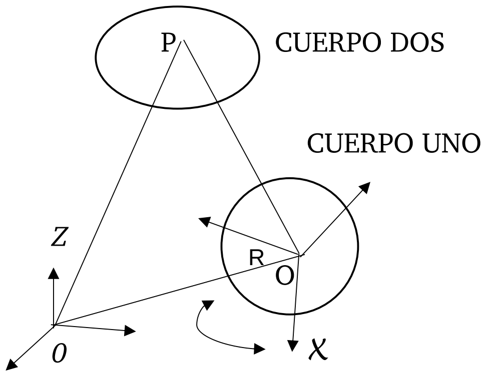


Figura 13. Movimiento relativo de dos cuerpos
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Cualquier punto P del cuerpo dos tiene un movimiento absoluto respecto del sistema {Oxyz} (velocidad y aceleración absolutas) y también tendrá un movimiento relativo del sistema {OXYZ} (velocidad y aceleración relativas).

Vector de Posición Absoluto de P

Refiriéndonos a la figura 13 mostrada, se tiene que:

$$\vec{r}_P = \vec{r}_o + \vec{R} \tag{3.1}$$

En donde:

- $\vec{r}_P = \vec{r}_P(t)$: Representa el vector de posición de la partícula medido en el sistema {oxyz}
- $\vec{r}_o = \vec{r}_o(t)$:Representa el vector de posición del origen O del Sistema relativo medido en el sistema {oxyz}
- $\vec{R} = \vec{R}(t)$: Representa el vector de posición de la partícula P en el sistema móvil {OXYZ}

Velocidad Absoluta de P

Para obtener la velocidad de la partícula P, derivamos respecto del tiempo la ecuación del vector de posición

$$\vec{V}_P = \frac{d\vec{r}_P}{dt} = \frac{d\vec{r}_o}{dt} + \frac{d\vec{R}}{dt} \tag{3.2}$$

En donde:

- $\vec{V}_P$: Representa la velocidad absoluta de la partícula P.
- $\frac{d\vec{r}_o}{dt}$: Por definición, representa la velocidad del origen O del sistema relativo y será denotada por $\vec{V}_o$
- $\frac{d\vec{R}}{dt}$: Variación del vector $\vec{R}$ en el tiempo para un observador ubicado en el sistema inercial {oxyz}

Por lo tanto (3.2) puede reescribirse

$$\vec{V}_P = \vec{V}_o + \frac{d\vec{R}}{dt} \tag{3.3}$$

La función vectorial $\vec{R} = \vec{R}(t)$ es una función del tiempo, cuyas coordenadas en el sistema de referencia móvil rígido son respectivamente X, Y, Z. Se tendrá entonces que, para un observador ubicado en el sistema {OXYZ).

$$\vec{R} = X\hat{I} + Y\hat{J} + Z\hat{K} \tag{3.4}$$

En donde, tanto los vectores de base $\{\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}\}$como las coordenadas X, Y, Z son funciones del tiempo, para un observador instalado en el sistema fijo {oxyz).

Derivando la ecuación (3.4) respecto del tiempo aplicando la ecuación fundamental de la cinemática tenemos que:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{W}_{1o} \times \vec{R} + \frac{\partial\vec{R}}{\partial t} \tag{3.5}$$

Pero,

$$\frac{\partial\vec{R}}{\partial t} = \vec{V}_{r/p} \tag{3.6}$$

Por lo tanto,

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = W_{1o} \times \vec{R} + \vec{V}_{r/p} \tag{3.7}$$

Sustituyendo (3.7) en (3.3):

$$\vec{V}_P = \vec{V}_o + \vec{W}_{1o} \times \vec{R} + \vec{V}_{r/p} \tag{3.8}$$

En donde:

- $\vec{V}_p$: Vector velocidad absoluta de la partícula P.
- $\vec{V}_o$: Vector velocidad absoluta del origen O del sistema de referencia relativo.
- $\vec{W}_{1o}$: Vector velocidad angular absoluta del sistema de referencia relativo.
- $\vec{R}$: Vector de posición relativo de la partícula.
- $\frac{\partial \vec{R}}{dt}$: Variación del vector $\vec{R}$ en el tiempo para un observador ubicado en el sistema móvil {OXYZ}.
- $\vec{V}_{r/p} = \frac{\partial \vec{R}}{dt}$: Vector velocidad relativa de la partícula P.

A los dos primeros términos de la ecuación (8.8) Se les llama *velocidad de transporte* de la partícula P. Esta velocidad de transporte$\left(\vec{V}_\tau\right)$ representa la velocidad de la partícula P si esta perteneciera al cuerpo uno.

$$\vec{V}_\tau = \vec{V}_o + W_{1o} \times \vec{R} \tag{3.9}$$

Por lo tanto, podemos escribir la velocidad de una partícula del cuerpo dos, animado de movimiento relativo respecto del uno. Así:

$$\vec{V}_p = \vec{V}_o + \vec{V}$$

Vector Aceleración Absoluta de P

Para obtener el vector aceleración absoluta de la partícula P: $\vec{a}_P$ derivamos la expresión de la velocidad $\vec{V}_P$ respecto del tiempo, así:

$$\frac{d\vec{V}_P}{dt} = \vec{a}_P = \frac{d\vec{V}_o}{dt} + \frac{dW_{1o}}{dt} \times \vec{R} + \vec{W}_{1o} \times \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{V}_{r/p}}{dt} \tag{3.10}$$

Observamos que $\frac{d\vec{V}_o}{dt}$ representa la aceleración absoluta del origen o del sistema relativo (sistema uno).

Definición

Se llama Aceleración Angular Absoluta del sistema relativo (sistema uno) de coordenadas, al vector $\vec{\alpha}_{1o}$ definido a través de la relación:

$$\vec{\alpha}_{1o} = \frac{d\vec{W}_{1o}}{dt} \tag{3.11}$$

Pero según (3.7):

$$N\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{w}_{1o} \times \vec{R} + \vec{v}_{r/p} \tag{3.12}$$

Y además aplicando la Ecuación Fundamental de la Cinemática

$$\frac{d\vec{v}_{r/p}}{dt} = \vec{w}_{1o} \times \vec{v}_{r/p} + \frac{\partial \vec{v}_{r/p}}{\partial t} = \vec{w}_{1o} \times \vec{v}_{r/p} + \vec{a}_{r/p} \tag{3.13}$$

En donde $\frac{\partial \vec{V}_{r/p}}{\partial t}$ representa la aceleración de la partícula P tal y como la mediría un observador solidario al sistema uno, esto es, la aceleración relativa de la partícula: $\vec{a}_{r/p}$

Según (3.11), (3.7) y (3.12) la ecuación (3.10) puede reescribirse así:

$$\vec{a}_p = \vec{a}_o + \alpha_{1o} \times \vec{R} + \vec{w}_{1o}\left(\vec{w}_{1o} \times \vec{R}\right) + 2\vec{w}_{1o} \times \vec{V}_{r/p} + \vec{a}_{r/p} \tag{3.14}$$

En donde:

- $\vec{a}_p$: Vector aceleración absoluta de la partícula P.
- $\vec{a}_o$: Vector aceleración absoluta del origen del sistema uno.
- $\vec{\alpha}_{1o}$: Vector aceleración angular absoluta del sistema relativo (sistema uno).
- $\vec{R}$: Vector de posición colativo do la partícula P.
- $\vec{v}_{r/p}$: Vector velocidad relativa de la partícula P.
- $\vec{a}_{r/p}$: Vector aceleración relativa de la partícula P. (medida por un observador solidario al sistema relativo.

Los tres primeros términos de (3.14) constituyen la *llamada aceleración de transporte:* $\vec{a}_\tau$ de la partícula P. Esta aceleración sería la de la partícula P si ella perteneciera al cuerpo uno.

$$\vec{a}_\tau = \vec{a}_o + \vec{\alpha}_{1o} \times \vec{R} + \vec{w}_{1o}\left(\vec{w}_{1o} \times \vec{R}\right) \tag{3.15}$$

Se llama aceleración de Coriolis o aceleración complementaria al vector $\vec{a}_c$ definido por:

$$\vec{a}_c = 2\vec{w}_{1o} \times \vec{V}_{r/p} \tag{3.16}$$

Esta aceleración tiene aplicaciones en el estudio de los cauces fluviales, lanzamiento de proyectiles, aeronáutica, etc.

De (3.15) y (3.16) se puede escribir (3.14) en la forma:

$$\vec{a}_p = \vec{a}_\tau + \vec{a}_c + \vec{a}_r \tag{3.17}$$

Es conveniente destacar que todas las aceleraciones indicadas, solamente es perceptible desde el primer cuerpo rígido (desde el sistema móvil {OXYZ} la aceleración relativa, por lo tanto, cualquier estudio cinemático o dinámico debe hacerse a partir de un sistema de referencia inercial.

La Velocidad Angular es un Vector Libre

El vector velocidad angular absoluta de un cuerpo rígido en movimiento es un vector libre.

Demostración

Considere un cuerpo rígido en movimiento respecto de un sistema inercial {OXYZ} y {O'X'Y'Z} dos sistemas de referencias solidarios al cuerpo, los cuales supondremos que tienen respectivamente las velocidades angulares $\vec{w}_{1o}$ y $\vec{w}_{2o}$, Su velocidad absoluta está determinada por la figura 14.

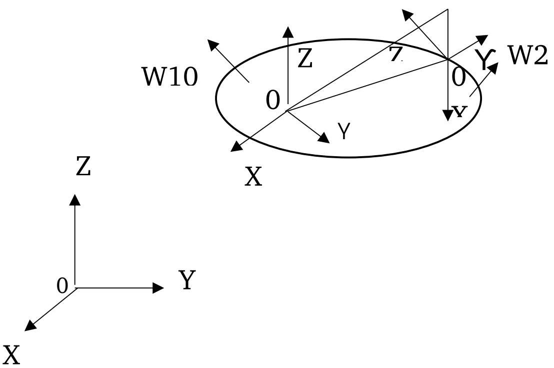


Figura 14. Cuerpo rígido en movimiento respecto a un sistema inercial
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza. 2019.

Sistema {OXYZ}

$$\vec{V}_p = \vec{V}_o + \vec{w}_{1o} \times \vec{r}_{p/o} \tag{3.18}$$

Sistema {O'X'Y'Z'}

$$\vec{V}_p = \vec{V}_o + \vec{w}_{1o} \times \vec{r}_{p/o'} \tag{3.19}$$

Igualando la velocidad de P dadas por las ecuaciones (3.18) y (3.19), se obtiene que:

$$\vec{V}_o + \vec{w}_{1o} \times \vec{r}_{p/o} = \vec{V}_{o'} = \vec{V}_o + \vec{w}_{2o} \times \vec{r}_{p/o'} \tag{3.20}$$

Pero la velocidad del origen O' del sistema {O'X'Y'Z') respecto del sistema {OXYZ} es:

$$\vec{V}_{o'} = \vec{V}_o + \vec{w}_{1o} \times \vec{r}_{o'/o} \qquad (3.21)$$

Sustituyendo el valor de $\vec{V}_o$ dado por la ecuación (3.21) en la ecuación (8.20) tenernos que:

$$\vec{V}_o + \vec{w}_{1o} \times \vec{r}_{p/o} = \vec{V}_o + \vec{w}_{1o} \times \vec{r}_{o'/o} + \vec{w}_{2o} \times \vec{r}_{p/o'} \qquad (3.22)$$

$$\therefore \quad \vec{w}_{1o} \times \vec{r}_{p/o} = \vec{w}_{1o} \times \vec{r}_{o'/o} + \vec{w}_{2o} \times \vec{r}_{p/o'}$$

Pero de la figura 14, se tiene que:

$$\vec{r}_{o'/o} = \vec{r}_{p/o} - \vec{r}_{p/o'} \qquad (3.23)$$

Reemplazando (3.23) en (3.22):

$$\vec{w}_{1o} \times \vec{r}_{p/o} = \vec{w}_{1o} \times \vec{r}_{p/o} - \vec{r}_{p/o'} + \vec{w}_{2o} \times \vec{r}_{p/o'} \qquad (3.24)$$

Ejecutando los productos y factorizando la ecuación (3.24):

$$(\vec{w}_{1o} - \vec{w}_{2o}) \times \vec{r}_{p/o'} = \vec{\theta}$$

Pero en general,

$$\vec{r}_{p/o} = \vec{\theta}$$

$$\therefore \quad \vec{w}_{1o} - \vec{w}_{2o} = \vec{\theta} \qquad (3.25)$$

$$\therefore \quad \vec{w}_{1o} = \vec{w}_{2o} \quad \text{C.S.Q.D}$$

La ecuación (3.25) comprueba la validez de la proposición, que afirma que el vector velocidad angular de un cuerpo rígido en movimiento es independiente del sistema solidario o lo que es lo mismo $\vec{w}$ es un "vector libre”

Relación Cinemática de las Velocidades Angulares de dos Cuerpos Rígidos en Movimiento

Para el análisis consideremos dos cuerpos rígidos C_2 *y* C_3. El cuerpo C_2 se mueve bajo cualquier ley y el C_3 además de tener el movimiento del primero tiene otro movimiento adicional, el cual será precisamente su *movimiento relativo* respecto del cuerpo rígido C_2. Si C_2se mueve con velocidad angular absoluta $\vec{w}$y C_3 el otro cuerpo rígido de velocidad angular $\vec{w}$, relativa a C_2. Se pide determinar la velocidad angular absoluta $\vec{\Omega}$ del cuerpo rígido C_3 ver figura 15

Solución:

{oxyz} Sistema fijo o sistema①.

{PXYZ} Sistema móvil o sistema ②. Solidario a C_2

{QXYZ} Sistema móvil o sistema ③ . Solidario a C_3

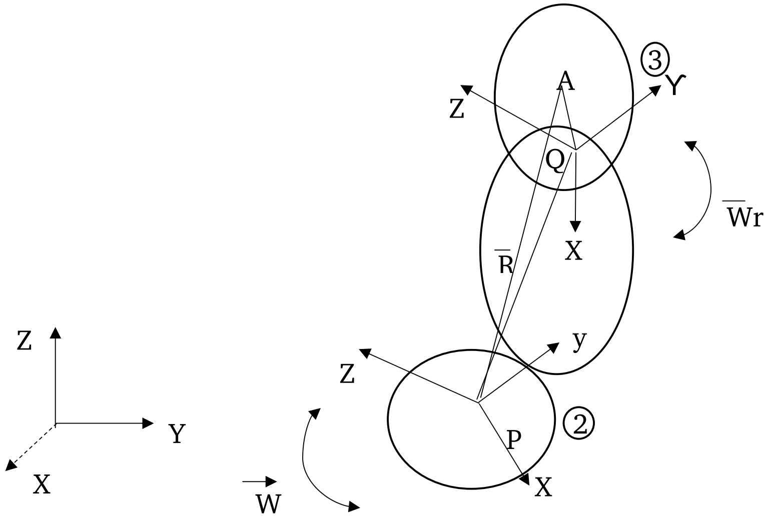


Figura.15. Velocidad angular absoluta de un cuerpo rígido
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza. 2019.

Sea A una partícula genérica de C_3 Determinación de la velocidad absoluta de A, utilizando los sistemas ① y ③

$$\vec{V}_A = \vec{V}_Q + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{A/Q} + \vec{V}_{A/3} \tag{3.26}$$

Pero,

$$\vec{V}_{A/3} = \vec{\theta}$$

Determinación de la velocidad absoluta de A, utilizando los sistemas ①y ②:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_p + \vec{w} \times \vec{r}_{A/P} + \vec{V}_{A/2} \tag{3.27}$$

Restando miembro a miembro (3.26) y (3.27):

$$\vec{V}_Q + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{A/Q} - \vec{V}_P - \vec{w} \times \vec{r}_{A/P} - \vec{V}_{A/2} = \vec{\theta} \tag{3.28}$$

Cálculo de la velocidad absoluta de Q, utilizando los sistemas ① y ②

$$\vec{V}_Q = \vec{V}_P + \vec{w} \times \vec{r}_{Q/P} + \vec{V}_{Q/2} \tag{3.29}$$

Cálculo de la velocidad relativa $\vec{V}_{A/2}$,para ello el observador, se traslada al sistema ② y considerará este sistema como fijo, el sistema ③ pasará a ser el sistema móvil con velocidad angular $\vec{w}$ respecto de ②. Nótese que ignoramos totalmente por ahora el sistema ①:

$$\vec{V}_{A/2} = \vec{V}_{Q/2} + \vec{w}_r \times \vec{r}_{A/Q} + \vec{V}_{A/3} \tag{3.30}$$

Pero

$$\vec{V}_{A/3} = \vec{\theta}$$

Reemplazando (3.29) y (3.30) en (3.28):

$$\vec{V}_P + \vec{w} \times \vec{r}_{Q/P} + \vec{V}_{Q/2} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{A/Q} - \vec{V}_P - \vec{w} \times \vec{r}_{A/P} - \vec{V}_{Q/2} + \vec{w}_r \times \vec{r}_{A/Q} = \vec{\theta} \tag{3.31}$$

$$\therefore\ \vec{\Omega} \times \vec{r}_{A/Q} + \vec{w} \times \left(\vec{r}_{Q/P} - \vec{r}_{A/P}\right) - \vec{w}_r \times \vec{r}_{A/Q} = \vec{\theta} \tag{3.32}$$

Pero,

$$\vec{r}_{A/P} = \vec{r}_{Q/P} + \vec{r}_{A/Q} \tag{3.33}$$

De la figura,

$$\vec{\Omega} \times \vec{r}_{A/Q} + \vec{w} \times \left(\vec{r}_{Q/P} - \vec{r}_{Q/P} + \vec{r}_{A/P}\right) - \vec{w}_r \times \vec{r}_{A/Q} = \vec{\theta}$$

Reemplazando (3.33) en (3.32):

$$\left(\vec{\Omega} - \vec{w} - \vec{w}_r\right) \times \vec{r}_{A/Q} = \vec{\theta}$$

Pero $\{\vec{r}_{A/Q} \neq \vec{\theta}$ y además $\vec{r}_{A/Q}$ no tiene que ser paralelo al vector $\left(\vec{\Omega} - \vec{w} - \vec{w}_r\right)$

Se concluye por lo tanto que:

$$\left(\vec{\Omega} - \vec{w} - \vec{w}_r = \vec{\theta}\right) \tag{3.34}$$

$$\therefore\quad \vec{\Omega} = \vec{w} + \vec{w}_r$$

La ecuación (3.34) también podemos escribirla así:

$$\vec{w}_{31} = \vec{w}_{21} + \vec{w}_{32} \tag{3.35}$$

En donde,

- $\vec{w}_{31}$: Es la velocidad angular absoluta del sistema Nº 3 respecto del sistema Nº 1
- $\vec{w}_{21}$Vector velocidad angular absoluta del sistema Nº 3 respecto del sistema Nº 2.

- $\vec{w}_{32}$ Vector velocidad angular absoluta del sistema Nº 3 respecto del sistema Nº 2.

De la forma análoga como se obtuvo (3.35) podemos también obtener una relación cinemática para las aceleraciones angulares. Esto es:

$$\vec{\alpha}_{31} = \vec{\alpha}_{21} + \vec{\alpha}_{32} + \vec{w}_{21} \times \vec{w}_{32}$$

CAPÍTULO IV

Dinámica

La dinámica es la parle de la mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos bajo la acción de un sistema de fuerzas no equilibradas. Arquímedes conocía los elementos de la estática, o sea, es la parte de la mecánica, que trata del equilibrio de las fuerzas, pero la dinámica era desconocida para los antiguos y fue fundada por Galileo Galilei y por Isaac Newton.

Más tarde J. D'Alembert (1717-1783) unifica la estática y la dinámica, demostrando que un problema de dinámica puede ser transformado en un problema de equilibrio de fuerzas y, por lo tanto, de estática, para ello tomó en consideración fuerzas ficticias llamadas también "fuerzas de inercia", para luego formular: "En cualquier instante del movimiento de una partícula las fuerzas activas aplicadas a esta, las reacciones de los vínculos impuestos y la fuerza de inercia de la partícula dada convencionalmente aplicada a ella están en equilibrio dinámico".

Con esta concepción de la mecánica como ciencia, quedo de cierto modo, concluida en cuanto a sus teoremas fundamentales. Pero podría también considerarse como una segunda etapa del desarrollo de la dinámica, la vivida hacia mediados del siglo XIX, por iniciativa principalmente de Hamilton, cuando él pensó en la sustitución del concepto de fuerza por el de energía. Esta idea fue inspirada en el principio de conservación de la energía enunciado por Helmholtz en 1847.

Métodos de la dinámica

Las leyes de Newton, muy particularmente la ley fundamental $\vec{F} = m\vec{a}$, permiten desarrollar métodos para estudiar el movimiento de los cuerpos, sometidos a sistemas de fuerzas no equilibradas. La elección del método más conveniente, depende del sistema de fuerzas actuante (constantes o variantes) y de las magnitudes que han de calcularse (velocidades, aceleraciones, fuerzas, etc).

En lo sucesivo, se estudiarán los métodos que clásicamente han sido estudiados en algunos textos, bajo el nombre de dinámica, a saber:

Método de la fuerza, masa y aceleración: el método es ventajoso cuando el sistema de fuerzas actuante tiene una o más fuerzas variables, que pueden expresarse como funciones de la posición del cuerpo.

Método de D'Alembert: Permite al usuario reducir formalmente los problemas de la dinámica a los problemas de la estática.

Método del trabajo y de la energía cinética: este es generalmente el mejor de los cuatro métodos. Es particularmente conveniente, cuando actúan sobre el cuerpo fuerzas o pares cualquiera, que varían con su posición y con la velocidad.

Método de los impulsos y cantidad de movimiento: este procedimiento es útil, cuando una o más de las fuerzas que conforman el sistema actuante son variables y pueden expresarse como funciones del tiempo. Los teoremas que soportan este método normalmente proporcionan, la solución más directa, sobre todo en aquellos problemas que involucran choques entre cuerpos.

Sin embargo, muchos problemas de dinámica pueden ser resueltos con relativa facilidad, por más de un método, proporcionándose de esta manera, una excelente herramienta para el control de la solución. Como cada método ofrece sus ventajas relativas para resolver determinados tipos de problemas, se recomienda el dominio de todos los métodos.

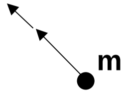
Dinámica de la partícula

La partícula es el sistema mecánico más sencillo. En adelante, nos ocuparemos del estudio de su movimiento, es decir, de las leyes que gobiernan su movimiento. El análisis, está basado fundamentalmente en la primera y segunda ley de Newton. El enunciado de la primera ley, fue postulado para toda partícula que permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme, siempre y cuando, sobre ella no actúe ninguna fuerza que modifique el estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme. Esta ley, llamada también "ley de inercia', establece la resistencia que ofrece la materia, a cualquier cambio de su estado de movimiento, haciendo que la masa sea un factor importante en la determinación del movimiento. La ley de inercia, defina en forma indirecta al concepto de fuerza como único ente capaz de producir una tendencia o cambio, en el movimiento de un cuerpo. Esto es, todos los cuerpos ejercen influencia sobre su propio movimiento.

La Segunda ley, dice que una fuerza F que actúa sobre una partícula de masa m, le produce a esta una aceleración a en la dirección de la fuerza proporcional a F; y cuya relación está determinada por la expresión vectorial $\vec{F} = m\vec{a}$. Del contenido del enunciado de esta ley, puede deducirse que, ante la acción de fuerzas diferentes sobre una misma partícula, se obtienen aceleraciones diferentes, e independientes de cualquier tipo de movimiento, que hubiese podido tener la partícula, antes de que actuara la fuerza. Esta circunstancia, nos permite establecer que el movimiento de una partícula dependerá de su movimiento inicial y también de las fuerzas actuantes,

La ecuación vectorial $\vec{F} = m\vec{a}$ puede escribirse en la forma escalar:

$$F = ma \qquad \text{(a)}$$



La expresión (a) proporciona un método dinámico para la determinación de la magnitud de una fuerza.

De la ecuación (a) resulta $a = \frac{F}{m}$, que nos dice que cuanto mayor sea la masa de la partícula tanto menor es la aceleración de la partícula que le puede ocasionar la fuerza dada. En consecuencia, cuanto mayor sea la masa, tanto menor será la variación de su velocidad al transcurrir el tiempo bajo la acción de la fuerza actuante.

Sistema de unidades

Es evidente la necesidad de llegar a tener un conocimiento amplio, de los diferentes sistemas de unidades de medición de las magnitudes físicas. En la mecánica, pueden expresarse dichas magnitudes mediante tres unidades fundamentales, el conjunto formado por esta define el sistema de unidades. Estamos formando lo que bien se podría llamar la “base dimensional” Así las magnitudes de la fuerza y la masa, están en cierta dependencia con las unidades fundamentales de tal modo, que se debe verificar la ecuación $\vec{F} = m\vec{a}$. Las tres unidades que forman la base dimensional son compatibles con dicha ecuación.

En el pasado, la mayoría de los cálculos en ingeniería, se hacía utilizando el Sistema Ingles de Medidas de Ingeniería (BES). No obstante, hoy día, los cálculos se realizan predominantemente con el uso del sistema Internacional de Unidades (SI).

El Sistema internacional es el sistema métrico modificado y por consiguiente difiere de los sistemas tradicionales, la tabla 4.1 muestra el SI y otros sistemas importantes.

Tabla 4.1 Sistema de unidades.

Sistema de unidades	Sistemas absolutos				Sistema gravitacional	
	Métrico			Ingles	Métrico de Ingeniería	Ingles de Ingeniería
Cantidad	SI	MKS	CGS			
Longitud	M	M	cm	ft	m	ft
Masa	Kg	Kg	G	Lb	$\frac{kgf - s^2}{m}$	Slug $\frac{Ibf - s^2}{ft}$
Tiempo	S	S	S	S	s	s
Fuerza	N $= \frac{kgf - m}{s^2}$	N $= \frac{kgf - m}{s^2}$	dyn $= \frac{g - cm}{s^2}$	Poundal $\frac{Ibf - ft}{s^2}$	Kg- f	Lb f
Energía	J = M - m	J = N - m	erg = dyn-cm	ft-poundal	Kgf – m	Ft-Ibf o BTU
Potencia	W $= \frac{N - m}{s}$	W $= \frac{N - m}{s}$	$\frac{\boldsymbol{dyn - cm}}{\boldsymbol{s}}$	$\frac{ft - poumd}{s}$	$= \frac{kgf - m}{s}$	$\frac{ft-Ibf}{s}$ ò HP

Fuente: Mecánica Vectorial, Ferdinand P. Beer. 2013

La diferencia conceptual entre los sistemas de unidades absolutas y las unidades gravitacionales, está precisamente en decidirse por la masa o la fuerza, como la tercera dimensión principal. Los sistemas absolutos de unidades, tales como, el métrico y el inglés optan por la masa como dimensión primaria y obviamente, la fuerza pasa a ser, una magnitud derivada. Todo lo contrario hacen los sistemas gravitacionales, como son el métrico de ingeniería y el inglés de ingeniería, que seleccionaron a la fuerza como dimensión primaria; y consecuentemente la masa es una cantidad derivada, Así este último sistema la unidad derivada de masa, viene definida por la relación fuerza/aceleración, mientras que en el SI, la unidad de fuerza es una magnitud derivada $\frac{Kg-m}{s^2}$ llamada Newton y se define, como la fuerza que proporciona a 1 Kilogramo de masa la aceleración de 1 $\frac{m}{s^2}$, o en forma equivalente:

$$1 \quad N = 1 \ Kg - \frac{m}{s^2}$$

Nomenclatura

Las unidades de SI, que conjuntamente con la BES, serán las más utilizadas en estos apuntes, se abrevian con letras minúsculas. Cuando una abreviatura de unidades lleva el nombre de una persona, esta se acostumbra a escribir con mayúscula, así por ejemplo, denotaremos el Newton por N y al joule por J, de la siguiente manera, ver tabla 4.2:

Tabla 4.2 Sistema internacional de unidades (SI)

Unidades	**Abreviatura**	**Letra**
METRO	m.	Minúscula
KILOGRAMO	kg.	Minúscula
SEGUNDO	s.	Minúscula
NEWTON	N.	Mayúscula
JOULE	J.	Mayúscula
WATT	W.	Mayúscula

Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Sistemas de referencias

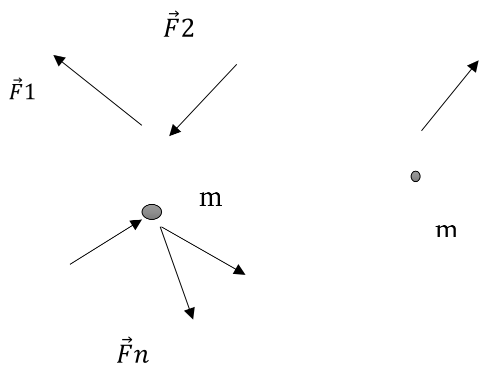
La primera y segunda ley de Newton. Fueron enunciadas para una partícula en movimiento en un sistema de referencia absoluto o inercial, es por esto que el movimiento que se mide a través de este sistema, se llama "movimiento absoluto".

El movimiento de una partícula en Cinemática no se relaciona con las fuerzas que actúan sobre ella, por consiguiente, cualquier sistema de referencia podría ser considerado como inercial o fijo; y en consecuencia el movimiento respecto del sistema seleccionado podría ser considerado absoluto. Sin embargo, esto no es posible en la Dinámica, ya que su objeto principal, es relacionar el movimiento de la partícula con el sistema de fuerzas que actúan sobre ella, y esta relación evidentemente es una función del sistema de referencia elegido, a menos que el sistema de referencia escogido se encuentre en traslación rectilínea y uniforme respecto de otro absoluto.

Ecuaciones del movimiento de una partícula

Siempre que un conjunto de fuerzas actúe sobre una partícula, (que carece de dimensiones) tendremos un sistema de fuerzas concurrentes. Por consiguiente, el sistema equivalente resultante está formado por una "fuerza única", e igual al vector *ma* tal como lo establece la segunda ley del movimiento de Newton. Consideremos una partícula de masa m en movimiento por la acción de un sistema formado por n fuerza concurrentes, $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots, \vec{F}_n\}$, siendo $\vec{F}$ la fuerza resultante del sistema. La segunda ley de Newton para el movimiento de la partícula, se expresa vectorialmente en la forma, tal como se muestra en la figura 16:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$



(a) Sistema Original

(b) Sistema equivalente
Fuerza resultante

Figura.16. Movimiento de una partícula de masa m
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

La ecuación vectorial (1), nos enseña que los vectores aceleración absoluta a y la fuerza resultante F, que actúan sobre la partícula de masa m, tienen siempre la misma dirección y sentido. Sabiendo que $\vec{F} = \sum \vec{F}_x\,\hat{\imath} + \sum \vec{F}_y\,\hat{\jmath} + \sum \vec{F}_z\,\hat{k}$ y además se tiene $m\vec{a} = ma_x\hat{\imath} + ma_y\hat{\jmath} + ma_z\hat{k}$. Entonces la ecuación (1), puede expresarse igualmente en función de sus componentes rectangulares, en distintos sistemas de referencia, dependiendo de la conveniencia en la solución de problemas.

En general, según sea el sistema de coordenadas requerido, el movimiento de una partícula podemos expresarlo de distintas maneras, por ejemplo:

1. Ecuaciones del movimiento de una partícula en el espacio, expresado en coordenadas rectangulares.

$$\sum F_x = ma_x, \qquad \sum F_y = ma_y, \qquad \sum F_z = ma_z, \tag{a}$$

2. Movimiento de una partícula en el espacio en coordenadas cilíndricas.

$$\sum F_r = ma_r, \qquad \sum F_\theta = ma_\theta, \qquad \sum F_z = ma_z, \tag{b}$$

3. Movimiento de una partícula en el espacio descrito en coordenadas esféricas.

$$\sum F_R = ma_R, \qquad \sum F_\theta = ma_\theta, \qquad \sum F_\emptyset = ma_\emptyset, \tag{c}$$

4. Descripción del movimiento curvilíneo plano de una partícula descrita en coordenadas naturales o intrínsecas.

$$\sum F_t = ma_t \qquad \sum F_n = ma_n \tag{d}$$

Donde,

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \dot{s} \qquad \text{y} \quad a_n = v.\dot{\theta} = p.\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{p}$$

5. Descripción del movimiento plano de una partícula en coordenadas polares.

$$\sum F_r = ma_r, \qquad \sum F_\theta = ma_\theta, \tag{e}$$

Siendo,

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \qquad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\ddot{r}\dot{\theta},$$

Es conveniente recordar que, en la Cinemática de la partícula, se determinó la aceleración absoluta de una partícula utilizando dos sistemas de referencia, uno inercial y otro en movimiento, respecto del cual la partícula tenía una aceleración relativa, obteniéndose:

$$\vec{a}_p = \vec{a}_0 + \vec{\alpha}x\vec{R} + \vec{\omega}x\left(\vec{\omega}x\vec{R}\right) + 2\vec{\omega}x\vec{V}r_{/p} + \vec{a}r_{/p}, \tag{f}$$

La ecuación (f) proporciona un procedimiento cinemático de determinación de la aceleración absoluta de una partícula.

Método de la fuerza, masa y aceleración: movimiento rectilíneo de una partícula

La primera y segunda ley de Newton sabemos que fueron enunciadas para ser aplicadas al movimiento de una partícula. Sin embargo, son abundantes los problemas de ingeniería, en los cuales es conveniente aplicar dichos axiomas para obtener una solución. Ejemplo de este tipo de problemas lo constituye el "movimiento de traslación rectilínea" de un cuerpo rígido, que está compuesto por un conjunto de partículas. En este caso, todas las partículas del cuerpo tienen el mismo movimiento y trayectorias rectilíneas similares. En la figura 17 se muestra un sistema formado por dos bloques A y B que se mueven respectivamente en dirección horizontal y vertical, unidos por una cuerda inextensible que pasa través de una polea.

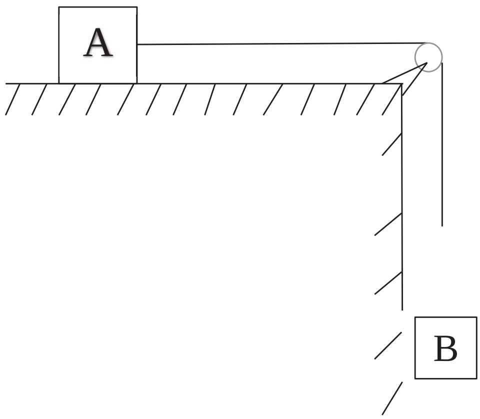


Figura.17. Movimiento de traslación rectilínea de una partícula
Fuente: Pinto, Gómez,

Cuando los bloques están en movimiento, observamos que todas las partículas que componen al bloque A, tienen exactamente el mismo movimiento rectilíneo en dirección horizontal. Así mismo, ocurre con el bloque B, pero en dirección vertical. En consecuencia, el movimiento de traslación rectilínea de un cuerpo rígido, puede investigarse, definiendo el movimiento de un punto del cuerpo, por ejemplo, de su centro de masa. Esto equivale a considerar al cuerpo formado por una sola partícula ficticia de masa igual a la del cuerpo completo, y ubicada en su centro de masa. En adelante, en la solución de algunos problemas, tomaremos en cuenta tales consideraciones.

Para el caso particular del movimiento de una partícula en que la fuerza resultante $\vec{F}$, sea de dirección constante, con una misma recta de acción, y que además su movimiento inicial tenga igualmente la misma dirección de $\vec{F}$, en este caso, el movimiento será necesariamente una " traslación rectilínea", Si se hace coincidir la recta del movimiento con el eje de las x. Ver la figura (18).

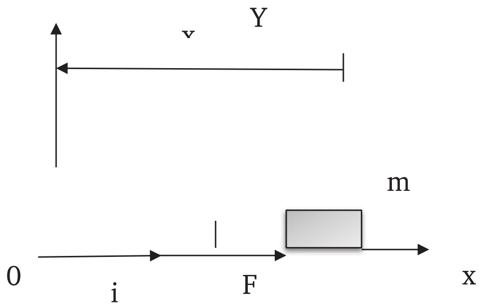


Figura.18. Movimiento rectilíneo de una partícula con dirección constante
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Conociendo que la aceleración se define como la segunda derivada del vector de posición $X = X\hat{\imath}$ respecto de la variable independiente tiempo, la ecuación vectorial (1) toma la forma:

$$\vec{F} = m\vec{a}_x = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = m\ddot{\vec{x}} \qquad (2)$$

La ecuación vectorial (2) es la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden del movimiento rectilíneo de la partícula.

Dependiendo de la ley de la variación de la fuerza resultante $\vec{F}$, la ecuación diferencial del movimiento (2) adoptará distintas formas, así, por ejemplo, podemos llegar a tener los siguientes casos particulares:

a) La fuerza resultante $\vec{F}$ es contante.

b) La resultante $\vec{F}$ es una función del tiempo, $\vec{F} = \vec{F}(t)$

c) La resultante $\vec{F}$ de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula es una función de la posición, matemáticamente $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x})$ escalarmente $F = F(x)$

d) $\vec{F}$ es la resultante del sistema de fuerzas que actúa sobre la partícula es una función de la velocidad, matemáticamente $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{V})$, escalarmente $F = F(\dot{X}) = F(V)$.

e) $\vec{F}$ fuerza resultante es una función de una combinación de algunos de los parámetros anteriores, por ejemplo:

$$\vec{F} = \vec{F}(\ddot{X}, \dot{\vec{X}})$$

$$\vec{F} = F(\vec{X}, t)$$

$$\vec{F} = (\dot{\vec{X}}, t)$$

Método de separación de variables en el movimiento rectilíneo

En general en el estudio del movimiento rectilíneo de una partícula, la mayoría de las expresiones matemáticas que describen las características dinámicas del sistema mecánico más simple (partícula) resultan estar descritas la mayor de las veces, en términos de ecuaciones diferenciales.

Diferenciar una función dada, para encontrar sus derivadas puede hacerse siempre, a través del uso de reglas matemáticas sencillas, pero el problema inverso de integrar una ecuación diferencial determinada para hallar su primitiva, resulta ser más complicado, no existiendo para tales fines, un método general de cálculo. Un procedimiento analítico muy efectivo para encontrar la solución general de la ecuación diferencial de la forma de la expresión (2), lo constituye el "método de separación de variables". Útil en los casos más sencillos, o sea, en aquellas situaciones donde la ecuación diferencial contiene únicamente dos variables que pueden separarse, No obstante, existen problemas en los cuales aparecen tres variables inicialmente, pero mediante la aplicación de la "regla de cadena", se puede eliminar una de ellas; y después se continúa con el proceso de separación de variables. Para una mejor ilustración, vamos a presentar seguidamente algunos casos.

La fuerza resultante es una constante: f = k

Si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula de masa m, con movimiento rectilíneo es de magnitud y dirección constante, entonces la ecuación diferencial (2), se transforma en:

$$\dot{V} = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \tag{a}$$

Separando variables en la expresión (a) e integrando luego, se tiene:

$$\int_{t_0}^{t} dt = \frac{m}{F}\int_{V_0}^{V} dv = \frac{m}{F}(v - v_0)$$

Pero,

$$\frac{F}{m} = \dot{V}$$

Por lo tanto, se obtiene para la velocidad V(t)

$$V(t) = V_0 + \dot{V}(t - t_0) = V_0 + \frac{F}{m}(t - t_0) \tag{b}$$

Para encontrar a x = x (t), se sustituye (b) en la ecuación de velocidad V (t) por dt/dt y luego se integra como sigue:

$$V(t) = \frac{dx}{dt} = V_0 + \frac{F}{m}(t - t_0)$$

$$\therefore \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} \left[V_0 + \frac{f}{m}(t - t_0)\right] dt$$

$$\therefore X(t) = X_0 + V_0(t - t_0) + \frac{F}{2m}(t - t_0)^2 \qquad \text{(c)}$$

Para encontrar V (x) aplicamos a la ecuación (a) la regla de cadena, multiplicando el primer miembro de la ecuación por dx/dx, obteniéndose:

$$\frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx} = \frac{F}{m}$$

Separando variables e integrando, resulta:

$$\frac{F}{m}\int_{x_0}^{x} dx = \int_{v_0}^{v} vdv \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t},$$

En forma equivalente:

$$V^2(x) = V_0^2 + \frac{2F}{m}(x - x_0) \qquad \text{(d)}$$

La fuerza resultante es una función del tiempo: f=f(t)

En este caso, la ecuación diferencial ordinaria (2), se convierte en:

$$\dot{V} = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{m}F(t) \qquad \text{(e)}$$

El método requiere que se maneje la expresión (a) de manera que, resulte una variable en cada miembro de la ecuación. Para lograrlo, vamos a multiplicar a ambos miembros de la ecuación (a) por el elemento diferencial dt, obteniéndose

$$dt = \frac{1}{m}F(t) \qquad \text{(f)}$$

La ecuación (b), es integrable si se conoce F(t). Integrando luego, se tiene:

$$V(t) + C_1 = \frac{1}{m}\int_0^t F(t)dt \qquad \text{(g)}$$

Donde C_1 es una constante arbitraria de integración y la $\int_0^t F(t)dt$ es la diferencia entre el valor de la función integral en cualquier instante t y el valor inicial cuando t=0. Para resolver esta integral, ayúdese con las tablas de integrales. Para obtener el valor de la constante C_1 de integración reemplazamos en la expresión (g) las "condiciones iniciales", Cuando:

$t = 0, V(0) = V_0$, o sea $C_1 = -V_0$,

Entonces,

$$\mathrm{V(t)} = \mathrm{V_0} + \frac{1}{\mathrm{m}}\int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{F(t)dt} \qquad \text{(h)}$$

La ecuación (h) nos conduce a la solución de la velocidad de la partícula en cualquier instante que se determine. Para encontrar la posición de la partícula expresamos a V(t) como dx/dt en la ecuación (h) y luego procedemos con el proceso de separación e integración de las variables, así:

$$\frac{dx}{dt} = V(t)$$

De donde:

$$X(t) + C_2 = \int_0^t V(t)dt \tag{i}$$

Suponiendo ahora que cuanto $t = 0, X(0) = X_0$, hallamos que $C_2 = -X_0$. por lo tanto la ecuación general que establece la relación posición-tiempo, resulta:

$$X(t) = X_0 + V_0 t + \int_0^t V(t)dt \tag{j}$$

La fuerza resultante es una función de la posición: f = f (x)

Cuando la fuerza es una función de la posición la ecuación diferencial (2), toma la forma:

$$\dot{V} = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} F(t) \tag{k}$$

En la ecuación diferencial (k) encontramos tres variables t, x, v, por lo que no es posible separar las variables cuando se expresa la aceleración como $\dot{V} = {}^{dv}/_{dt}$. Se sabe que debemos conservar la variable x, porque esta aparece en la expresión de la fuerza. Pero podemos eliminar t. Para conseguirlo, vamos a aplicar la regla de la cadena, multiplicando el primer miembro del a ecuación diferencial (k) por dx/dx, por lo tanto:

$$\dot{V} = \frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx} = V\frac{dv}{dx} = \frac{1}{m} F(x)$$

Ahora, si es posible separar las variables, luego integrando, se tiene:

$$\int_{v_0}^{v} v dv = \frac{1}{m} \int_{x_0}^{x} F(x)dx \tag{I}$$

Desarrollando las integrales definidas de la ecuación (I), se obtiene:

$$\frac{1}{2}(V^2 - V_0^2) = \frac{1}{m} \int_{x_0}^{x} F(x)dx \tag{m}$$

La ecuación (m) también puede escribirse como:

$$\frac{1}{2} mV^2 - \frac{1}{2} mV_0 = \int_{x_0}^{x} F(x)dx \tag{n}$$

La ecuación diferencial (n) permite calcular la velocidad en función de la posición; y establece que durante el movimiento rectilíneo de una partícula de masa m, bajo la acción de una fuerza resultante, que dependa la posición de la partícula (F=F (x)), la variación de su energía cinética en cualquier instante es igual al trabajo realizado por la fuerza resultante en el intervalo $X_0 \rightarrow X$. De la ecuación (n), se puede obtener la función V(x) en la forma:

$$V^2(x) = V_0^2 + \frac{2}{m}\int_{x_0}^{x} F\,(x)dx \qquad \text{(o)}$$

Para hallar la relación, posición-tiempo, expresamos la velocidad V(x) como la relación dx/dt, así:

$$\frac{dx}{dt} = V(x)$$

Separando las variables y luego integrando, se tiene:

$$\int_{t_0}^{t} dt = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{V(x)} \qquad \text{(p)}$$

Una vez resuelta la integral $\int_{t0}^{t} dt = \int_{x0}^{x} \frac{dx}{V(x)}$ de la ecuación (p), se obtiene el valor de x de la posición, para un instante t cualquiera. Pero si lo que se quiere, es hallar la velocidad V en un instante determinado, se reemplaza el valor de x dado por (p) en la ecuación (o).

La fuerza resultante es una función de la rapidez: f=f(v)

En el caso, en que la fuerza resultante que actúa sobre una partícula en movimiento rectilíneo, sea una función de la velocidad, la ecuación del movimiento (2) se reduce:

$$\dot{V} = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{m}F(v) \qquad \text{(q)}$$

Que al separar las variables e integrar, se obtiene:

$$\int_{t_0}^{t} dt = t - t_0 = m\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{F(v)} \qquad \text{(r)}$$

Al resolver la integral $\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{F(v)}$ de la ecuación (r), entonces se hace posible despejar la velocidad V(t), Para obtener la expresión x=x(t), escribimos V(t) en la forma:

$$\frac{dx}{dt} = V(t)$$

De la que se deduce:

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} V(t)dt$$

Desarrollando la integral del miembro de la izquierda y despejando, se tiene:

$$X = X_0 + \int_{t_0}^{t} V(t)dt\ C_1 \qquad \text{(s)}$$

Con el procedimiento anterior se obtuvo la velocidad y posición de la partícula en función del tiempo, o sea V = V(t) y x = x(t). Se requiere expresar la variable velocidad V para un valor de x, multiplicar por (dx/dx):

$$\dot{V} = \frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx} = V\frac{dv}{dx} = \frac{1}{m}F(v)$$

Expresión que luego de separar las variables e integrar, se reduce:

$$C_1\, X = X_0 + \int_{v_o}^{v} \frac{vdv}{F(v)} \qquad \text{(t)}$$

Disponemos ahora de dos ecuaciones que nos permiten determinar x = x(t). Una es la ecuación (s) y la otra forma se tiene eliminando V de las ecuaciones (r) y (t).

Fuerza resultante como una función general f=f (t,x,v)

Este es el caso más general, debido a que la resultante F de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula, es una función de las variables cinemáticas t, x, v. Por tanto, la ecuación (2) del movimiento rectilíneo de la partícula podemos escribirla en la forma:

$$\ddot{X} = \frac{1}{m}F(t,x,v) \qquad \text{(u)}$$

No es fácil resolver la ecuación diferencial (u), debido a que las variables son por lo general inseparables. Por esta razón, no se puede reducir el problema a términos integrables. Pero hallar la solución general de la expresión (u), escapa a objetivos de este libro.

CAPÍTULO V

Movimiento rectilíneo - fuerza constante

Consideremos que una partícula de masa m se mueve sobre una superficie horizontal sin fricción, por la acción de la resultante $\vec{F}$ que es una fuerza constante en la dirección del eje de la X. Ver la figura (19).

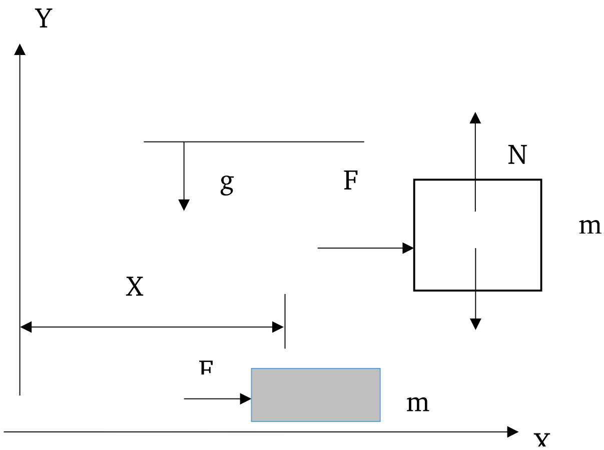


Figura.19. Movimiento de una partícula sobre una superficie sin fricción
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Como todos los vectores relacionados con el movimiento de la partícula son colineales, la ecuación vectorial (2) de la página 72, se puede escribir en la forma escalar:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \qquad \text{(a)}$$

Separando las variables e integrando, se tiene:

$$V + C_1 = \frac{F}{m}t \qquad (5.1)$$

Para hallar el valor numérico de la constante de integración C_1 reemplazamos en (b) las condiciones iniciales cuando t = 0, V = V se obtiene $C_1 = -V_0$. Sustituyendo en (b), queda:

$$V = V_0 + \frac{F}{m}t \qquad (5.2)$$

Reemplazando a V por dx/dt y si se separan las variables y luego se integra, resulta:

$$X + C_2 = V_0 t + \frac{F}{2m} t^2 \qquad (5.3)$$

Sustituyendo las condiciones iniciales cuando t = 0, x(0) = X, $C_2 = -X_0$. Sustituyendo luego en (5.3) el valor de C tenemos:

$$X = X_0 + V_o t + \frac{F}{2m} t^2 \qquad (5.4)$$

Expresando (5.2) y (5.4) en forma vectorial, queda:

$$\vec{V} = \left(V_0 + \frac{F}{m} t\right) \hat{\imath} \qquad (5.5)$$

Y

$$\vec{X} = \left(X_0 + V_0 t + \frac{F}{2m}\ t^2\right) \hat{\imath} \qquad (5.6)$$

Derivando la ecuación vectorial (5.5) respecto de la variable dependiente tiempo resulta.

$$\vec{a} = \frac{F}{m} \hat{\imath} \qquad (5.7)$$

Para el caso particular en que se tenga un cuerpo en caída libre se tiene que $\vec{g} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$, aceptando a $\vec{g}$ como constante en las proximidades de la superficie terrestre, lográndose finalmente a través de un proceso de integración, las ecuaciones escalares

$$V = V_0 + \vec{g} t \qquad (5.8)$$

Y,

$$Y = Y_0 + V_0 t + 1/2 g t^2 \qquad (5.9)$$

Las ecuaciones (5.8) y (5.9) para las condiciones $Y_0 = 0\ y\ V_0 = 0$, se transforman en:

$$V = V_0 + \vec{g} t y \qquad Y = Y_0 + V_0 t + 1/2 g t^2$$

Problema ilustrativo 1

Un bloque de masa m se desliza sobre un plano inclinado con un ángulo θ, como se muestra en la figura. El coeficiente de rozamiento dinámico entre el cuerpo y el plano es μ. Determinar la aceleración del bloque, de la figura 20.

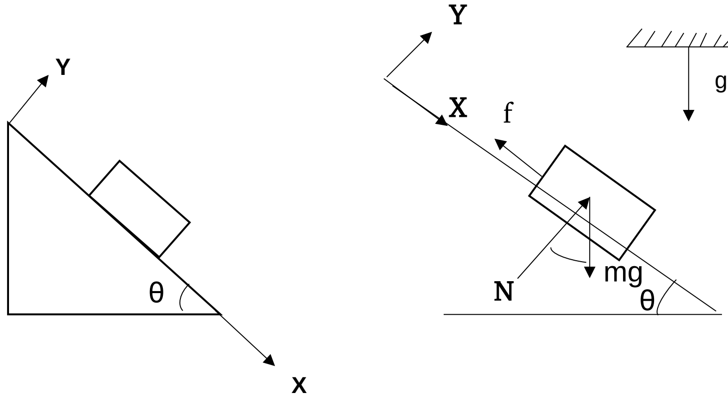


Figura 20. Movimiento de un bloque sobre un plano inclinado
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza. 2019.

Solución

Sabemos que los principios de la dinámica se aplican solamente al movimiento de una partícula. Sin embargo, en muchos problemas de ingeniería se requiere estudiar el movimiento de cuerpos rígidos, compuestos por un conjunto de partículas que se mueven todas exactamente con la misma trayectoria rectilínea. Por lo tanto, es suficiente estudiar el movimiento de una partícula, por ejemplo, la de su centro de masa, De este tipo es nuestro problema. Entonces, de la ecuación (2) utilizando el Diagrama de cuerpo inclinado de la figura 20, podemos escribir:

$$\vec{F} = (mg\ sen\theta - f)\hat{\imath} + (Nmg\ cos\theta)\hat{\jmath} = m\ddot{x}\hat{\imath} \tag{a}$$

La ecuación vectorial (a) puede descomponerse en las dos ecuaciones escalares:

$$\hat{\imath}: mg\ sen\ \theta - f = m\ddot{x} \tag{b}$$

$$\hat{\jmath} = Nmg\ cos\theta = 0 \tag{c}$$

Pero,

$$\text{f}=\mu N = \mu mg\ cos\theta \tag{d}$$

Sustituyendo el valor de (f) dado por (d) en (b) y despejando, se tiene:

$$\ddot{x} = g(sen\theta - \mu\ cos\theta)$$

Problema ilustrativo 2

Hallar la aceleración del bloque de 50 Kg., si el coeficiente de rozamiento dinámico entre el bloque y la superficie horizontal es de 0.6 y P es de 40 Kg-f y forma un ángulo de 30º con la horizontal como lo muestra la figura 21.

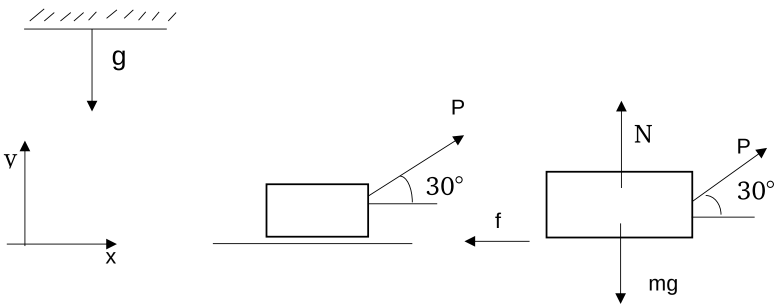


Figura 21. Aceleración de un bloque sobre una superficie horizontal
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza. 2019.

Solución

El movimiento del bloque es similar al movimiento de su centro de masa. Tomando al eje X como la dirección de movimiento, la ecuación vectorial (2) se puede expresar:

$$\vec{F} = (40(kg - f)9.8(m/s^2)\cos 3\,0^0 - 0.6N)\hat{\imath} + \lfloor N - 50(kg)x9.8(m/s^2) + 40(40(kg - f)x9.8(m/s^2)sen30^0\rfloor\hat{\jmath} = 50\ddot{X}\hat{\imath}$$

Igualando los coeficientes de i y j, de la expresión (a), se tiene:

$$\hat{\imath}:\quad 40(kg - f)x9.8\left(\frac{m}{s^2}\right)\cos 30^0 - 6N = 50(kg)\ddot{X} \qquad \text{(b)}$$

$$\hat{\jmath}:\quad N - 50(Kg)x9.8\left(\frac{m}{s^2}\right) + 40(Kg - f)x9.8\left(\frac{m}{s^2}\right)sen30^0 = 0 \qquad \text{(c)}$$

De (b) y (c) se tiene finalmente:

$$\ddot{X} = 3.2(m/s^2)\hat{\imath}$$

Problema ilustrativo 3

Hallar la aceleración de A y B en el sistema de poleas A y B que se muestra en la figura 22, tienen el mismo peso W y se puede despreciar la masa de las poleas.

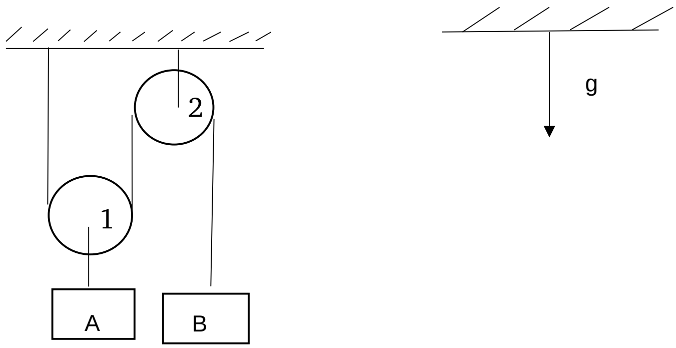


Figura.22. Aceleración de un sistema de poleas 1 y 2
Fuente: Mecánica Vectorial E. Russell Johnston, Jr, 2010

Solución

Como se desprecian las masas de las poleas, la tensión en la cuerda no cambia al pasar a través de ellas. Esta situación se muestra en los diagramas de cuerpo libre (b) y (c) de la figura 23:

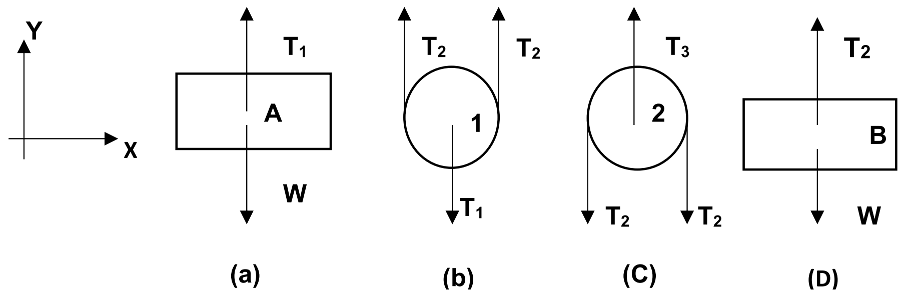


Figura.23. Diagrama de cuerpo libre del sistema de poleas 1 y 2
Fuente: Mecánica Vectorial E. Russell Johnston, Jr, 2010

Expresando las ecuaciones de movimiento para cada uno de los diagramas de cuerpo libre, se obtiene:

$$T_1 - W = \frac{W}{g}\ddot{Y}_A \tag{a}$$

$$2T_2 - T_1 = (0)\dddot{Y}_1 \qquad \Rightarrow T_1 = 2T_2 \tag{b}$$

$$T_3 - 2T_2 = (0)\dddot{Y}_2 \qquad \Rightarrow T_3 = 2T_2 \tag{c}$$

$$T_2 - W = \frac{W}{g}\ddot{Y}_B \tag{d}$$

Disponemos ahora de cuatro ecuaciones, pero tenemos cinco incógnitas, por lo tanto, se necesita una ecuación adicional. Para obtenerla haremos algunas consideraciones cinemáticas. Obsérvese que se han utilizado dos coordenadas independientes para describir las aceleraciones, pero realmente solo una de ellas es independiente. Esto es lo mismo que decir, que el sistema tiene un grado de libertad, Los desplazamientos $Y_A\ y\ Y_B$ lo podemos relacionar del siguiente modo. Supongamos que el bloque B tiene un desplazamiento positivo hacia arriba Y_B con relación al sistema XY. Entonces la polea 1 al igual que el bloque A tendrá un desplazamiento - $Y_B/2$ por lo tanto:

$$Y_B = Y_B \Rightarrow \ddot{Y}_B - \ddot{Y}_B \tag{e}$$

$$Y_A = -Y_B/2 \Rightarrow \ddot{Y}_A = -\ddot{Y}_B/2 \tag{f}$$

Sustituyendo (b'), (e) y (f) en las ecuaciones escalares (a) y (d), se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$T_1 - W = \frac{W}{g}\ddot{Y}_A \qquad \text{(g)}$$

Y

$$T_1 - 2W = \frac{4W}{g}\ddot{Y}_A \qquad \text{(h)}$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (g) y (h), podemos escribir:

$$\ddot{Y}_A = \frac{g}{5}\hat{j} \qquad y \qquad \ddot{Y}_B = \frac{2g}{5}\hat{j}$$

Problema ilustrativo 4

Dos pesos P y Q están unidos por medio del dispositivo indicado en la figura 24. Desprecie la masa de las poleas y de la cuerda inextensible. Hallar la aceleración $A_Q$del peso Q. Suponga que la cuerda no desliza sobre las poleas.

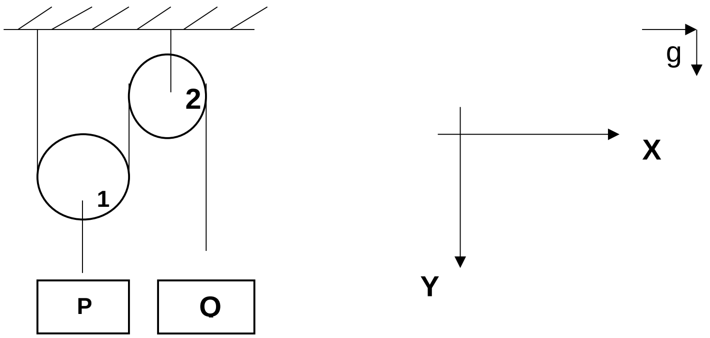


Figura 24. Aceleración de un sistema de poleas para dos cuerpos P y Q
Fuente: Mecánica Vectorial E. Russell Johnston, Jr, 2010

Solución

Siendo despreciables las masas de las poleas, la tensión en la cuerda no cambia al pasar está a través de las poleas, tal y como muestra en los diagramas de cuerpo libre de la figura 25 (b) y (c) que se muestra a continuación:

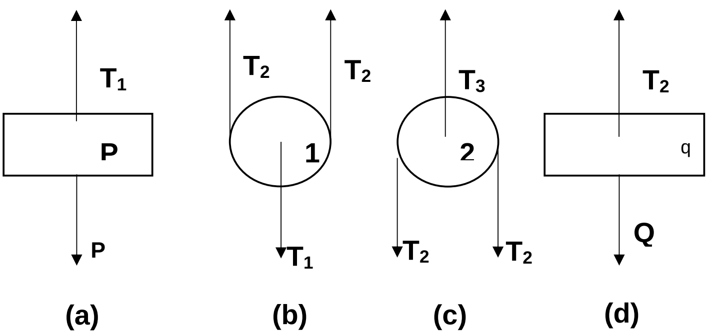


Figura.25. Diagrama de cuerpo libre de un sistema de poleas P y Q
Fuente: Mecánica Vectorial E. Russell Johnston, Jr, 2010

Expresando las ecuaciones del movimiento para cada uno de los diagramas de cuerpo libre, suponiendo positivo el desplazamiento hacia abajo, se tiene que:

$$P - T_1 = \frac{P}{g}\ddot{Y}_P \tag{a}$$

$$T_1 - 2T_2 = (0)\ddot{Y}_1 \qquad \Rightarrow T_1 = 2T_2 \tag{b}$$

$$2T_2 - T_3 = (0)\ddot{Y}_2 \qquad \Rightarrow T_3 = 2T_2 \tag{c}$$

Se dispone de un sistema de cuatro ecuaciones, pero tenemos cinco incógnitas obsérvese que un desplazamiento Y_Q del peso Q hacia abajo, genera un desplazamiento Y/2 al peso P, que a su vez es igual al de la polea 1 hacia arriba, condición cinemática que nos permite escribir las siguientes relaciones:

$$Y_Q = Y_Q \Rightarrow A_Q - \ddot{Y}_Q \tag{d}$$

Y,

$$Y_p = \frac{Y_Q}{2} \Rightarrow A_p = \ddot{Y}_p = -\frac{\ddot{Y}_Q}{2} \tag{e}$$

Sustituyendo (b'), (d) y (e) en las ecuaciones escalares (a) y (e), se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$P - T_1 = -\frac{P}{2g}\ddot{Y}_Q \tag{f}$$

$$2Q - T_1 = \frac{2Q}{g}\ddot{Y}_Q \tag{g}$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (f) y (g), podemos escribir:

$$A_Q = \ddot{Y}_Q = g\left(\frac{4Q-2P}{4Q+P}\right)$$

Movimiento rectilíneo - la resultante es una función del tiempo

Es evidente que el movimiento rectilíneo de una partícula que se mueve en un sistema inercial, con una velocidad inicial $\vec{V}_0$, bajo la acción de una fuerza resultante $\vec{F}$ de dirección constante e igual a la de $\vec{V}_0$, ambos vectores, sus componentes son nulos respecto de dos de los ejes de referencia, si la partícula se mueve en la dirección de uno de ellos. Por ejemplo, si el movimiento se produce en la dirección del eje X, tal como lo muestra la figura 26, entonces debe satisfacerse:

$$\vec{F} = \vec{F}_x\hat{\imath}, \quad \vec{F}_y\hat{\jmath} = F_2\hat{k} = \vec{\theta}$$

Análogamente.

$$\vec{V}_0 = V_0\hat{\imath}, \qquad V_{0y}\hat{\imath} = V_{0y}\hat{k} = \vec{\theta}$$

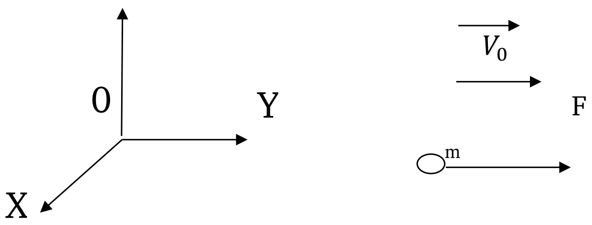


Figura.26. Movimiento rectilíneo de una partícula en un sistema inercial
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza 2019.

Bajo las condiciones anteriores la Ecuación (2) de la página 72, puede expresarse escalarmente, para este movimiento particular en la forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m}F \tag{5.10}$$

Pero si además, existe la condición de que la fuerza resultante $\vec{F}$ que actúa sobre una partícula, sea únicamente una función del tiempo t, entonces $\vec{F}$solo puede cambiar de magnitud al transcurrir el tiempo, según una ley determinada F = F(t). Por lo que, la ecuación (5.10) se transforma en:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m}F \tag{5.11}$$

Lo que es equivalente:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m}F(t) \tag{5.12}$$

La ecuación general del movimiento de la partícula se obtiene de la integración sucesiva de la expresión (c) entre los instantes $t_0 = 0$y t, obteniéndose de (5.12).

$$V + C_1 = \frac{1}{m}\int_0^t F(t)dt \tag{5.13}$$

El valor numérico de la constante de integración C_1, se reemplaza en (d), las condiciones iniciales cuando $t = 0, V(0) = V_0$, la integral se anula (suponiendo F (t) finita en el inicio del movimiento, $C_1 = -V_0$ obteniéndose Reemplazando este valor en (5.13), resulta:

$$V = V_0 + \frac{1}{m}\int_0^t F(t)dt \tag{5.14}$$

La Ecuación (5.14) permite determinar la velocidad de la partícula en cualquier instante y del movimiento, siempre y cuando la fuerza resultante F(t) sea conocida y que se pueda resolver la integral $\int_0^t F(t)dt = g(f)$ e integrando nuevamente, se tiene:

$$X + C_2 = V_0 t + \frac{1}{m}\int_0^t g(t)dt \tag{5.15}$$

Si suponernos finita a g(t) cuando $t = 0$, $X(0) = X_0$ y sustituyendo las condiciones iniciales en (e), obtenemos que $C_2 = -X_0$, por lo que la ecuación que expresa la posición queda finalmente en la forma.

$$X = X_0 + V_0 t + \frac{1}{m}\int_0^t g(t)dt \tag{5.16}$$

Si las integrales (5) y (6) ofrecen dificultad para la determinación de sus primitivas, entonces se recurrirá a métodos numéricos o gráficos para su solución. No obstante, independientemente de las dificultades que ofrezca el movimiento rectilíneo de una partícula, que esté sometida a la acción de una resultante de fuerzas que sea una función del tiempo, F=F(t) las ecuaciones (5) y (6), siempre reducen el cálculo a la simple solución de dos integrales definidas.

En resumen, de las ecuaciones (5.15) y (5.16) se deduce:

1. Que el movimiento rectilíneo de una partícula sometida a la acción de una fuerza cuya magnitud varía con el tiempo, puede considerarse como superposición de dos efectos uno inicial (x_0, V_0) y otro producido por la fuerza F (t), que se evalúa a través de una integral definida.

2. Si la resultante F(t) es nula, entonces la partícula se mueve con movimiento rectilíneo uniforme con velocidad V_0.

3. Si la resultante F(t), actúa sobre la partícula durante un tiempo diferencial dt, esta produce un cambio instantáneo en la velocidad, el cual está determinado por:

$$dv = \frac{1}{m}F(t)dt \tag{5.17}$$

4. La fuerza resultante F(t) que actúa durante un diferencial de tiempo dt, produce durante ese instante un desplazamiento de magnitud despreciable a la partícula

Problema ilustrativo1

En un caso, una partícula de masa m se mueve en línea recta por la acción de una fuerza $F = P_0\, cos\, w\, t$, mientras que, en otro caso, la fuerza que actúa es $F = P_0 senwt$. Deducir las ecuaciones generales, desplazamiento – tiempo de la figura 27. Supóngase, en cada caso, que el desplazamiento y las velocidades iniciales son nulos.

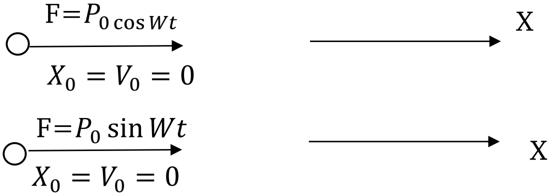


Figura.27. Movimiento rectilíneo de una partícula de masa m
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Solución

Se toman como positivas las fuerzas que tienen el sentido del desplazamiento de la partícula, siendo el desplazamiento en la dirección del eje de las X. Al aplicar la ecuación (6) a ambos casos, conociendo que $X_0 = V_0 = 0$, se tiene:

$$X_1 = \frac{1}{m}\int_0^t g_1\,(t)dt \qquad \text{(a)}$$

$$X_2 = \frac{1}{m}\int_0^t g_2\,(t)dt \qquad \text{(b)}$$

Pero,

$$g_1(t) = \int_0^t P_0 \cos w\, tdt = \frac{P_0}{w} senwt \qquad \text{(c)}$$

Y,

$$g_2(t) = \int_0^t P_0\, senwtdt = \frac{P_0}{w}(1 - \cos w\, t) \qquad \text{(d)}$$

Sustituyendo (c) y (d) en las ecuaciones (a) y (b), se tiene respectivamente:

$$X_1 = \frac{P_0}{w^2 m} - \frac{P_0}{w^2 m}\cos wt = \frac{P_0}{w^2 m}(1 - \cos wt) \qquad \text{(e)}$$

Y,

$$X_2 = \frac{P_0}{w^2 m}(wt - senwt) \qquad \text{(f)}$$

Problema ilustrativo 2

Se aplica una fuerza $F_Y$empezando en el instante t = 0, durante 3 segundos en el sentido positivo del eje Y, a una partícula de 0.25 Kg., que se movía inicialmente en el sentido negativo de dicho eje, con una velocidad de 10m/s. Si la fuerza medida en Newton, varía respecto del tiempo, medido en segundos, según la función $F_Y = 4t$. F_Y es la única fuerza que actúa sobre dicha partícula en la dirección del eje Y. Determinar el desplazamiento experimentado por la partícula de la figura 28 durante 3 segundos.

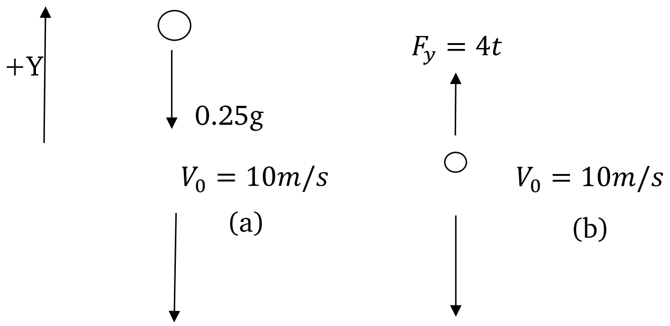


Figura.28. Movimiento rectilíneo de una partícula en un sistema inercial
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza. 2019.

Solución

Se realiza el diagrama de cuerpo libre que muestran el movimiento de la partícula justamente antes y después de aplicar la fuerza $F_Y = 4t$. Ver la figura (a) y (b) donde $F_Y = 4t = f(t)$ es la única fuerza que actúa sobre la partícula, lo que indica que se ha despreciado el efecto de la gravedad o que el mismo está incluido en $F(t) = 4t$. Sustituyendo $F_Y = F(t)$ y V_0 en la ecuación (6), resulta:

$$\Delta Y = -10t + \frac{1}{0.25}\int g(t)dt \qquad \text{(a)}$$

Pero,

$$g(t) = \int_0^t F_y\,(t)dt = \int_0^t 4tdt = 2t^2$$

Reemplazando (b) en (a) e integrando en el intervalo de 0 a 3 segundos resulta:

$$\Delta Y = (-10m/g)x(3s) + \frac{1}{0.25}\int_0^3 2t^2\,dt = -30 + 2\frac{t^3}{3}\Big|_0^3 = (-30+72)m = 42m$$

$$\Delta Y = 42m$$

Problema ilustrativo 3

Una partícula de masa m parte del reposo en el origen y se mueve a lo largo del eje X bajo la acción de una fuerza cuya magnitud está dada por $F = F_0 senwt$, Ver figura 29. Deducir las expresiones generales para X y X como funciones del tiempo

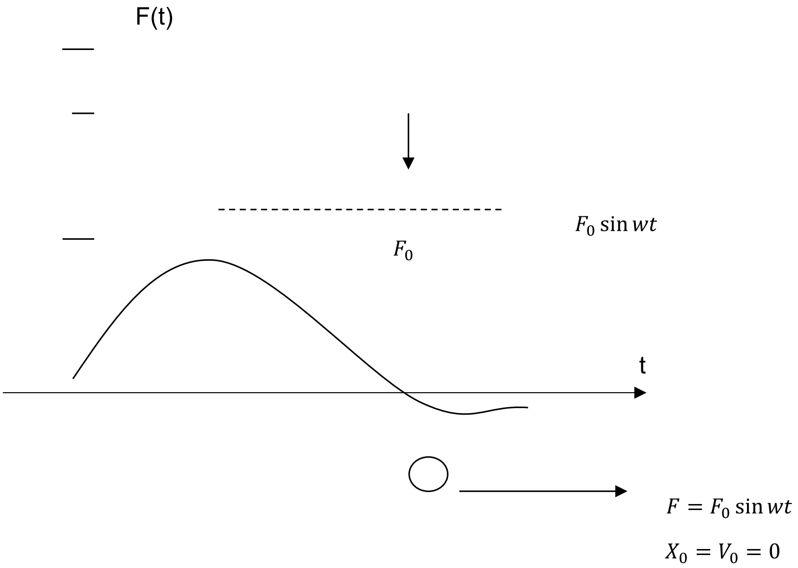


Figura.29. Movimiento en el eje x de una partícula en reposo
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza. 2019.

Solución

Puesto que no hay velocidad ni desplazamiento inicial las ecuaciones (5) y (6) que expresan el movimiento rectilíneo de una partícula bajo la acción de una resultante $F = F(t)$ adoptan las formas:

$$V = \dot{X} = \frac{1}{m}\int_0^1 F_0\, senwtdt = -\frac{F_0}{mw} cos\, w\, t \qquad \text{(a)}$$

Y,

$$X = \frac{1}{m}\int_0^1 g(t)dt \qquad \text{(b)}$$

Pero la segunda ley de Newton para el movimiento de la partícula bajo la resultante $F = F_0 senwt$, establece que:

$$\ddot{X} = \frac{1}{m} F_0 senwt = \frac{1}{m} F(t)$$

Entonces,

$$g(t) = \int F_0\, senwt = -\frac{F_0}{w} cos\, w\, t$$

Por lo tanto

$$X = -\frac{F_0}{mw^2} senwt \qquad \text{(c)}$$

Movimiento rectilíneo - la resultante es una función de la posición

Frecuentemente se tiene una partícula con movimiento rectilíneo, debido a la acción de una fuerza resultante, que es una función de la posición de la partícula, F=F(x). Este tipo de movimiento se puede representar gráficamente por una función posición tiempo, como se muestra en la figura 30.

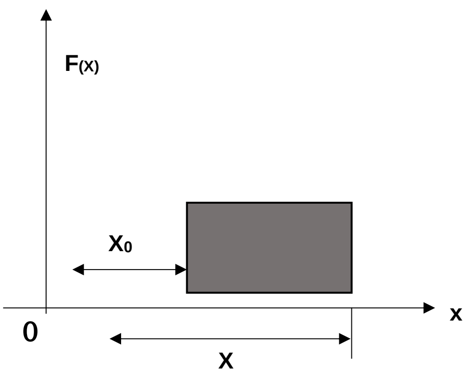


Figura.30. Movimiento rectilíneo de la partícula con acción de una fuerza resultante
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza. 2019.

En este caso, se puede igualmente obtener una solución de la ecuación diferencial por el método de separación de variables. Entonces la ecuación (2) toma la forma:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m}F(x) \tag{5.18}$$

Multiplicando el primer miembro de la ecuación (5.18) por dx/dx y luego separando las variables:

$$vdv = \frac{1}{m}F(x) \tag{5.19}$$

Integrando ambos miembros de la expresión (5.19):

$$\frac{V^2}{2} + C_1 = \frac{1}{m}\int_{x_0}^{x} F(x)dx \tag{5.20}$$

Reemplazando en la expresión (5.20) las condiciones iniciales del movimiento cuando $t = 0, x = x_0$, $V = V_0$, sabiendo también que en el instante inicial $\int_{x_0}^{x} F(x)dx$,es nula se obtiene $C_1 = V_0^2/2$. Sustituyendo:

$$m\frac{V^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \int_{x_0}^{x} F(x)dx \tag{5.21}$$

La Ecuación (5.21) evidentemente establece que, la variación de la energía cinética de una partícula en movimiento rectilíneo, que se mueve bajo la acción de una fuerza resultante que depende de la posición de esta, es igual al trabajo realizado sobre la partícula por la fuerza resultante. Sin embargo, esta ecuación también es útil cuando se requiere calcular la velocidad en función de la posición.

Haciendo,

$$\int_{x_0}^{x} F(x)dx = g(x) \tag{5.22}$$

La ecuación (5.22) puede escribirse:

$$\frac{dx}{dt} = V = \pm\sqrt{{V_0}^2 + \frac{2}{m}g(x)} \tag{5.23}$$

El signo de (5.23) se selecciona de manera que coincida con el de la velocidad inicial. Separando las variables en la Ecuación (5.23) e integrando, obtenemos:

$$t + C_2 = \int \frac{dx}{\pm\sqrt{{V_0}^2 + \frac{2}{m}g(x)}} \tag{5.24}$$

Para calcular el valor numérico de la constante de integración C_2 se consideran las condiciones iniciales cuando $t = 0, x(0) = X_0$, se obtiene $C_2 = 0$. Sustituyendo en, resulta:

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\pm\sqrt{V_0^2 + \frac{2}{m}g(x)}} \tag{5.25}$$

De esta manera, se obtiene una expresión de forma x=f(t). Se entiende que cuando F(x) sea una función conocida, las ecuaciones (7), (7.a) y (8) permiten calcular la velocidad y el desplazamiento de una partícula como una función del tiempo.

Problema ilustrativo 1

Una partícula de masa m, se deja caer de su posición de reposo desde una altura h respecto del centro de la Tierra, ver la figura 31. Si se desprecia la resistencia del aire, Se pide: a) Determinar la fuerza que el planeta ejerce sobre la partícula, como una función del radio de la Tierra y de la distancia y a su centro, b) Hallar las expresiones generales, para la velocidad y el tiempo de caída de la partícula en función de su posición Y.

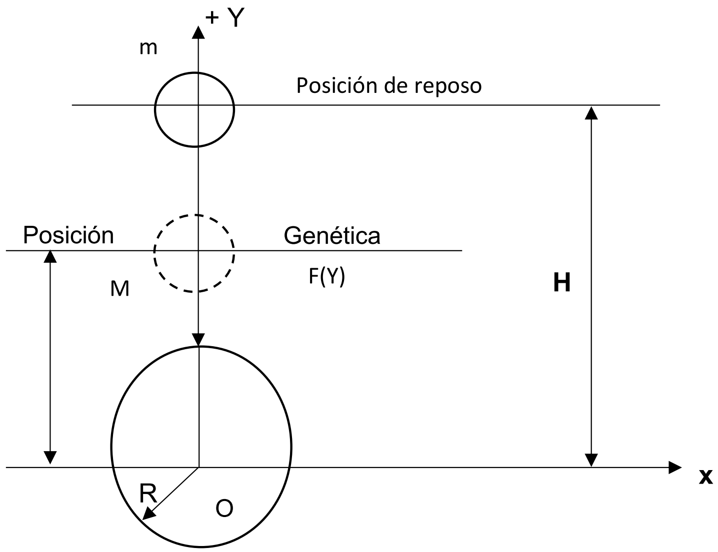


Figura.31. Movimiento en caída de una partícula en reposo
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Solución

a) La partícula es un sistema de masa constante, sometida a la acción de una fuerza conservativa.

La partícula de masa m y la Tierra se atraen mutuamente, según la ley de Gravitación Universal mediante una fuerza proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia, ver figura 32, según la recta que une sus centros. La fuerza resultante de atracción para una posición genérica de la partícula, será:

$$F(y) = \frac{-CMm}{Y^2} \quad \text{(a)}$$

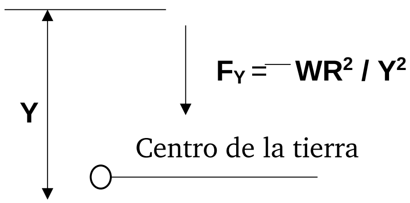


Figura.32. Diagrama de fuerzas resultantes de atracción de la partícula
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Siendo M, m respectivamente la masa de la Tierra y de la partícula, mientras que $C = 6.67x10^{-8}cm^3/Kg - s^2$ es la constante de Cavendish.

Se conoce, que el peso w de la partícula en la superficie del planeta, viene dado por la relación.

$$W = mg = \frac{CMm}{R^2} \tag{b}$$

Siendo R la radio de la Tierra. Despejando CM de la expresión (b) y sustituyendo en la ecuación (a), obtenemos:

$$F(y) = -\frac{WR^2}{Y^2} \tag{c}$$

La ecuación (c) permite determinar la fuerza resultante que ejerce el planeta sobre la partícula, en función de su posición Y.

b) para encontrar la velocidad y el tiempo de caída, se aplican respectivamente las ecuaciones (7) y (8), con $V_0 = 0$, así:

$$V^2 = -\frac{2}{\frac{w}{g}}\int_h^y F(y)dy = \frac{2g}{w}\int_h^y \frac{wR^2}{Y^2}dy = 2g\left[\frac{R^2}{Y}\right]_h^y$$

De donde se obtiene:

$$\vec{V} = -\sqrt{2gR^2\left(\frac{1}{Y} - \frac{1}{h}\right)}\,\hat{j} \tag{d}$$

Y, además:

$$t = \int_h^y \frac{dy}{\pm\sqrt{\frac{2g}{w}g(y)}} \tag{e}$$

Pero,

$$g(y) = WR^2(1/Y - 1/h) \tag{f}$$

Reemplazando (f) en (e), queda

$$t = \frac{h/R}{\sqrt{2gh}}\int_h^y \sqrt{\frac{Y}{Y-h}}dy \tag{g}$$

Para resolver la integral de la ecuación (g), se realiza el siguiente cambio de variable

$$Y = h\,cos^2\,\theta \qquad \text{(h)}$$

De la expresión (h) se deduce que:

$$dy = -2sen\theta\,cos\,\theta\,d\theta \qquad \text{(i)}$$

Y,

$$\theta = arccos\sqrt{Y/h} \qquad \text{(j)}$$

Sustituyendo (i) y (j) en (g), se obtiene:

$$t = \frac{2h^2/R}{\sqrt{2gh}}\int_0^{\theta}\sqrt{\frac{cos^2\,\theta.sen^2\theta.cos^2\,\theta}{-sen^2\theta}}\,d\theta = \frac{2h^2/R}{\sqrt{2gh}}\int_0^{\theta} cos^2 \quad d\theta \qquad \text{(k)}$$

Integrando la ecuación (k), resulta:

$$t = \frac{h^2/R}{\sqrt{2gh}}(\theta + 1/2sen\theta) \qquad \text{(l)}$$

Sustituyendo y $y = h\,cos^2\,0$, se obtiene finalmente:

$$t = \frac{h^2/R}{\sqrt{2gh}}(arccos\sqrt{y/h} + \sqrt{y/h(1-y/h)} \qquad \text{(m)}$$

La ecuación (m), permite calcular el tiempo de caída de la partícula para una posición dada y en el intervalo R < Y <h.

Problema ilustrativo 2

El extremo A de una cadena AB, de longitud L, se sujeta temporalmente sobre la cubierta lisa de una mesa, quedando colgante un tramo de longitud b, como se indica en la figura 33, al soltar el extremo A, la cadena comienza a moverse. Encontrar:

a) las expresiones generales para el módulo de la aceleración y para la rapidez, en términos de desplazamiento X del extremo A.

b) Hallar el módulo de la aceleración y la rapidez de la cadena cuando el extremo A deja la superficie de la mesa.

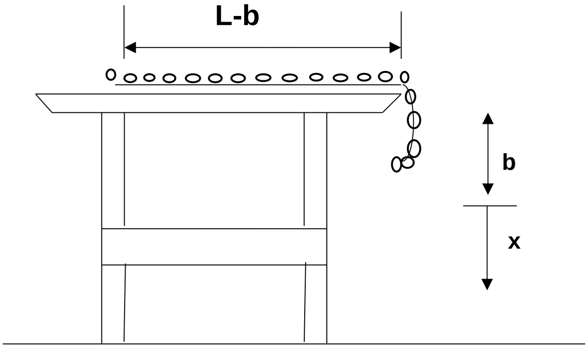


Figura.33. Desplazamiento de la cadena sobre una superficie lisa de la cadena
Fuente: Mecánica Vectorial E. Russell Johnston, Jr, 2010

Solución

a) El sistema está formado por los segmentos de cadena (L - b) que se encuentra sobre la mesa horizontal más el segmento de cadena b colgante, el extremo A, representado por el último eslabón inicialmente se encuentra en reposo y el peso de porción b colgante se encuentra en equilibrio por la tensión o fuerza aplicada al extremo A, la cual produce un reposo total del sistema

$$\frac{w}{g}x = \frac{w}{L}x + \frac{w}{L}b \qquad \text{(a)}$$

Por lo tanto, para $t_0 = 0, X_0 = 0, V_0 = 0$para el último eslabón en el extremo A de la cadena.

Al dejarse en libertad el extremo A este se desplaza una distancia X igual al desplazamiento vertical de la porción colgante que cae por su peso.

Aplicando la segunda ley de Newton tanto el extremo A (último eslabón) y a la porción que cae se obtiene:

$$a = \ddot{x} = \frac{g}{L}(x + b) \qquad \text{(b)}$$

La ecuación (b) da la aceleración del extremo A de la cadena en función de la posición X. Usando la ecuación (7.a) con las condiciones iniciales, cuando $t = 0, X(0) = V_0 = 0, X(0 = 0)$, se obtiene:

$$V = \sqrt{\frac{2}{w/g}g(x)} \qquad \text{(c)}$$

Siendo,

$$g(x) = \int_{x_0}^{x} F(x)dx = \frac{W}{L}\int_{0}^{x}(x + b)dx = \frac{W}{L}\left(\frac{x^2}{2} + bx\right) \qquad \text{(d)}$$

Sustituyendo (d) en (c), tenemos:

$$V = \sqrt{\frac{g}{L}(x^2 + 2bx)} \qquad \text{(e)}$$

La ecuación (e) da la velocidad instantánea del extremo B de la cadena en función de la posición x.

b) Las condiciones finales del movimiento del extremo B de la cadena, son las siguientes:

x=L-b,

x = V (velocidad con que el último eslabón abandona la mesa). De las ecuaciones (b) y (e), se deduce:

a=g/L (L - b + b)=g

Y, además

$$V = \sqrt{g/L[(L-b)^2 + 2b(L-b)]} = \sqrt{\frac{g}{L}(L^2 - b^2)} = \sqrt{g\left(L - \frac{b^2}{L}\right)}$$

CAPÍTULO VI

Movimiento rectilíneo de sistemas mecánicos donde la fuerza resultante es una función de la posición o de la velocidad

Con el propósito de profundizar aún más en el estudio del movimiento rectilíneo de una partícula y trasnacional de un cuerpo rígido bajo la acción de una fuerza resultante, que dependa de la posición o de la velocidad, se presenta a continuación el concepto de sistemas mecánicos constituido por ciertos elementos básicos donde las ecuaciones del movimiento se encuentran aplicando las leyes de Newton.

Sistemas mecánicos

El juego de dos resortes de la figura 34 se utiliza para detener el símbolo A de masa m que llega a una velocidad V e invierte el sentido de su movimiento. El resorte interior aumenta la deceleración y su posición ajustable se emplea para regular el punto exacto en el que se invierte el Sentido del movimiento del embolo.

Es una combinación de mecánicos componentes que actúan conjuntamente con el propósito de alcanzar un objetivo específico. Un componente mecánico es un elemento particular que cumple con una determinada función en un sistema mecánico.

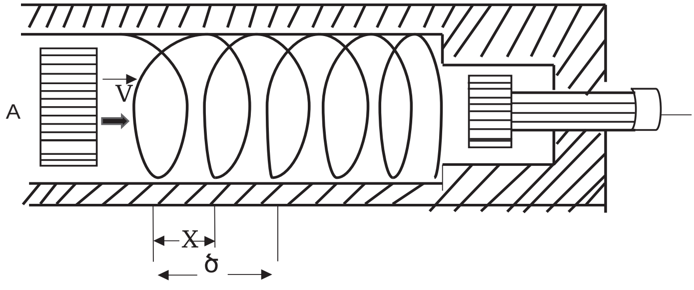


Figura.34. Juego de dos resortes
Fuente: Dinámica de Sistemas, Katsuhiko

Un sistema mecánico es dinámico si responde en el presente en su funcionamiento con datos de entrada en el pasado, en las ecuaciones que describen y explican su movimiento. De aquí se tiene que cualquier sistema mecánico dinámico puede ser estudiado mediante la aplicación de las leyes de Newton.

En estos apuntes no ocuparemos de tres tipos de elementos mecánicos: elementos de inercia, de resorte y de elementos amortiguadores.

Elementos de inercia

Es un elemento mecánico representado por las masas y los momentos de inercia y el mismo puede definirse de dos maneras, según el tipo de movimiento que tenga el cuerpo, así:

a) Movimiento de traslación:

Masa=fuerza / aceleración lineal= $\frac{N}{m/s^2} = Kg$

b) Movimiento de rotación:

Momento de inercia=Par / aceleración angular= $\frac{N}{rad/s^2}$

Elemento resorte traslacional

Es un elemento mecánico que se deforma por la acción de una fuerza externa, de manera que la deformación sea proporcional a la fuerza aplicada.

En la figura (35 a) se muestra un resorte deformado con respecto a su posición original por dos fuerzas aplicadas una en cada extremo.

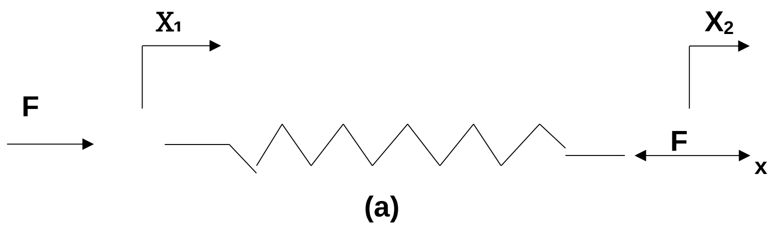


Figura.35 (a). Deformación de un resorte con respecto a su posición
Fuente: Dinámica de Sistemas, Katsuhiko Ogata. 1995

Las posiciones X_1 y X_2 de los extremos del resorte han sido medidas desde el mismo sistema de referencia inercial, siendo:

X_1: el desplazamiento lineal de un extremo.

X_2: el desplazamiento lineal del otro extremo.

Entonces X_1- X_2 es el desplazamiento lineal neto de los extremos del resorte.

Las fuerzas F son de igual magnitud y tienen además la misma recta de acción. Siendo así la fuerza F y el desplazamiento neto X_1- X_2=X se relacionan mediante la expresión:

$$F = K\ X = K(X_1 - X_2) \qquad (6.1)$$

Donde K es la constante elástica del resorte llamada también constante de proporcionalidad, de la ecuación (a) es fácilmente deducible que la dimensión de K es fuerza/desplazamiento = Newton/metro.

El resorte traslacional, pierde su condición cuando este se deforma más allá de su límite elástico, alcanzando un punto a partir del cual la fuerza dividida por el desplazamiento unitario deja de ser constante. Si se continúa deformando aún más, se llega a un punto de ruptura del resorte. La constante elástica del resorte es una medida de la rigidez del mismo, un valor relativamente alto de la constante K, significa dureza del resorte y lo contrario un resorte suave, ver figura 35 (b).

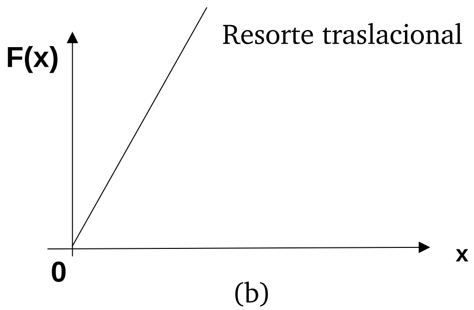
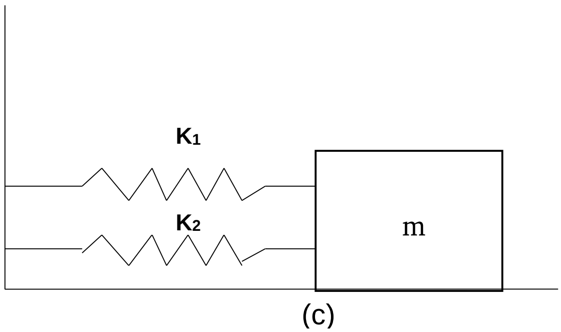


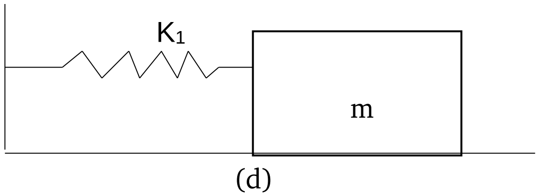
Figura 35 (b). Deformación de un resorte más allá de su límite elástico
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza. 2019.

Resorte equivalente

Dos resortes instalados en paralelo o en serie, pueden ser sustituidos por un solo resorte equivalente. El proceso mediante el cual se obtiene un resorte equivalente a otros dos, se llama composición de resortes. Caso contrario, descomposición de resortes. En el sistema mecánico equivalente con rigidez $F = K_1 + K_2$ que se muestra en la figura 35 (c) y (d).



Figura, 35 (c) Resorte instalado en paralelo K_1 y k_2
Fuente: Dinámica de Sistemas, Katsuhiko Ogata.1995



Figura, 35 (d). Resorte equivalente k= $k_1 + k_2$
Fuente Dinámica de Sistemas, Katsuhiko Ogata.1995.

En general, para (n) resortes instalados en paralelo con constantes $\{K_1, K_2, K_3 \ldots, K_n\}$ se puede deducir también que:

$$K = \sum_{i=1}^{n} Ki \qquad (6.2)$$

Siendo K la constante equivalente del sistema. Para todo sistema de resorte conectados. En serie, tal como los que se ilustran a continuación en la figura 35 (e), se tiene que:

$$K = \frac{K_1.K_2}{K_1+K_2} \qquad (6.3)$$

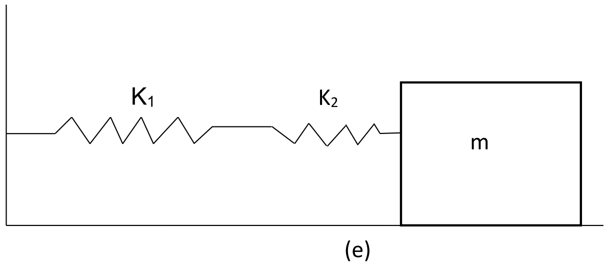


Figura 35 (e). Resortes instalados en serie con constantes K_1 y K_2
Fuente: Dinámica de Sistemas, Katsuhiko Ogata.1995

Si son n resortes instalados en serie con constantes $\{K_1, K_2, K_3 \ldots, K_n\}$, se puede demostrar que:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \ldots + \frac{1}{k_n} = \sum_{i-1}^{n} \frac{1}{k_i} \qquad (6.4)$$

Elemento amortiguador traslacional

Es un elemento mecánico que absorbe energía y la disipa en forma de calor al medio que lo rodea. Un amortiguador está compuesto por un cilindro lleno de un fluido viscoso y un pistón con un vástago, Ver la figura 36.

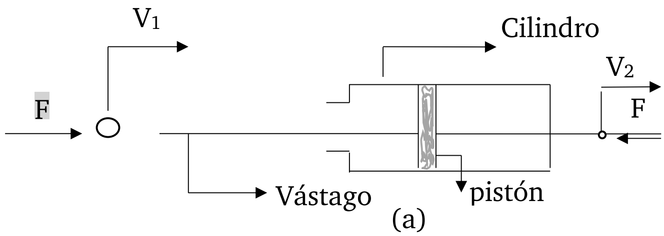


Figura 36. Amortiguador traslacional
Fuente: Dinámica de Sistemas, Katsuhiko Ogata.1995

Las fuerzas F son de igual magnitud y tienen la misma recta de acción. La fuerza F es directamente proporcional a la diferencia de las velocidades de los extremos del amortiguado, matemáticamente:

$$F = \mu V = (V_1 - V_2) \qquad (6.5)$$

Siendo μ la constante de proporcionalidad o coeficiente de fricción viscosa y $V_1 - V_2$ son las velocidades de los extremos del amortiguador traslacional las cuales se miden desde el mismo sistema de referencia. Obsérvese que la posición de los extremos a diferencia de los resortes, no participan en la ecuación (a), mientras que aparece el factor $V_1 - V_2$ como la velocidad relativa de traslación de los extremos.

Nótese que el amortiguador es un elemento mecánico que ofrece una resistencia al movimiento, En consecuencia, se le considera como un elemento de resistencia mecánica.

Sistema mecánico masa - resorte

El ejemplo más sencillo e importante del movimiento rectilíneo de una partícula o de la traslación rectilínea de un cuerpo rígido, que se mueve bajo la acción de una fuerza resultante que es una función de la posición, lo constituye un sistema masa - resorte sin rozamiento, en donde la resultante que actúa sobre una masa que se mueve como una partícula, es proporcional al desplazamiento.

La figura 37 muestra un sistema formado por una masa suspendida de un resorte, obligada a moverse en la dirección vertical. Durante el movimiento del sistema actúan sobre la masa dos fuerzas, a saber: la fuerza gravitacional mg y la fuerza del resorte KX. Por conveniencia, se seleccionó como positivo el desplazamiento hacia abajo.

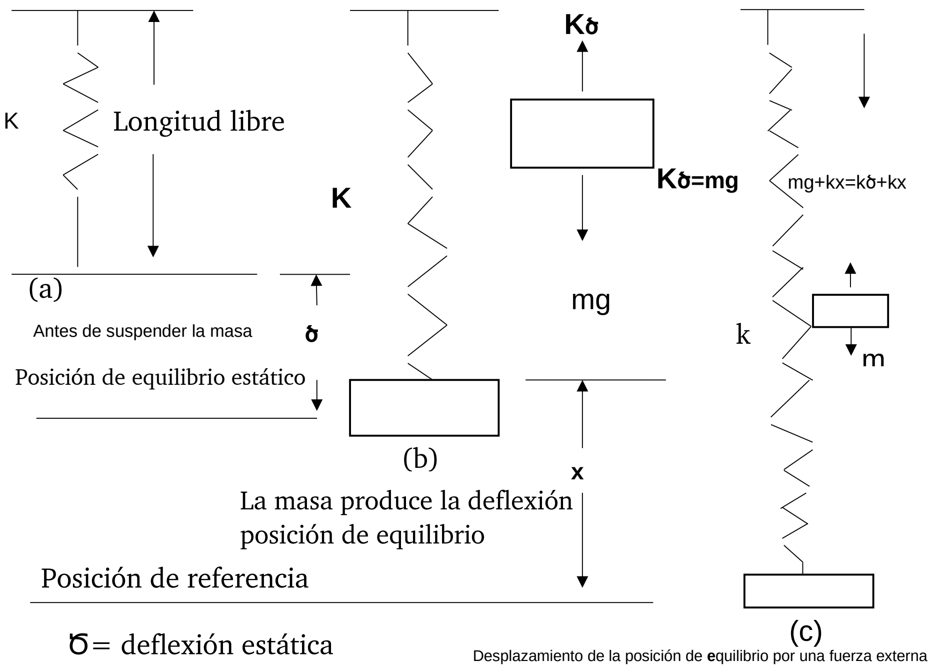


Figura 37. Sistema mecánico masa –resorte
Fuente: Dinámica de Sistemas, Katsuhiko Ogata.1995

La acción de la fuerza gravitacional mg, alargará el resorte una longitud δ, que en adelante llamaremos deflexión estática, produciendo una tensión, que obligará a una reacción vertical dirigida hacia arriba sobre la masa suspendida, lográndose así que la resultante que sobre el cuerpo sea nula ($K\delta = mg$), por lo tanto, este se encuentra en una posición de equilibrio estático, fig. 37 (b). Si ahora se desplaza la masa hacia abajo una distancia X, con respecto a su posición de equilibrio por la acción de una fuerza externa (dentro del límite elástico del resorte) la cual aumentará la fuerza en el resorte. Si luego se suelta el sistema, la fuerza del resorte actúa hacia arriba y tiende a jalar la masa hacia arriba por efecto de la fuerza no equilibrada, entrando así, el sistema en movimiento rectilíneo. Mediante la aplicación de la segunda ley de Newton, obtenemos la ley del movimiento del sistema masa- resorte.

$$m = \frac{d^2x}{dt^2} = mg - (mg + kx) \tag{6.6}$$

En forma equivalente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{6.7}$$

Siendo K la constante elástica del resorte y representa la fuerza que se necesita para estirar una unidad de longitud al resorte. Si medimos el desplazamiento X desde la posición de equilibrio, entonces el peso mg del cuerpo puede omitirse de la ecuación diferencial ordinaria del movimiento, ya que $mg = k\delta$.

La masa suspendida que se desplazó hacia abajo la distancia X medida a partir de su posición de equilibrio, se suelta de manera que $X_0 \; y \; V_0$ sean respectivamente el desplazamiento y la velocidad inicial de la masa m. La masa oscilará y el movimiento rectilíneo será del tipo vibratorio periódico, ya que el cuerpo oscilará alrededor de un punto fijo que es la posición de equilibrio. El movimiento periódico que se observa al desplazarse la masa a través de la posición de equilibrio estático, es una vibración libre, debida a ciertas condiciones iniciales.

Para hacer una descripción completa del movimiento rectilíneo del sistema masa - resorte, donde la masa suspendida puede ser considerada como una partícula, es necesario conocer el desplazamiento X en cada instante (t) del movimiento, se desprende de esta circunstancia, que en cualquier problema de esta naturaleza se requiere determinar una función X=X(t) la cual, debe satisfacer la ecuación diferencial (2), así como también las condiciones iniciales del movimiento. Es conveniente tener siempre presente, que la solución de una ecuación diferencial de segundo orden es en general, una expresión que tiene dos constantes arbitrarias de integración, de ahí se desprende el nombre de solución general de la ecuación para esta función. Sin embargo, analíticamente el problema se resuelve buscando primeramente la solución general de la ecuación y posteriormente se determinan los valores numéricos para las dos constantes de integración, de tal manera que satisfagan las condiciones iniciales del movimiento, es decir, cuando $t = 0; V(0) = V_0 \; y \; X(0) = X_{0.}$

Un método útil para resolver la ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes expresada por la ecuación (2), consiste en suponer que la función x = x(t) puede tener cualquiera de las dos formas: exponencial o sinusoidal. Para poder obtener la solución general de la ecuación planteada. Se supone que x = x (t) admite una solución exponencial del tipo.

$$X(t) = De^{\lambda t} \tag{6.8}$$

Siendo λ una constante. Sustituyendo el valor de x = X(t) dado por la solución propuesta (6.7) en la ecuación (6.8), se obtiene:

$$D\lambda^2 e^{\lambda t} + \frac{k}{m} De^{\lambda t} = 0 \tag{6.9}$$

Dividiendo la ecuación (6.9) por $De^{\lambda t}$, se tiene:

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0 \tag{6.10}$$

La expresión (6.10) suele llamarse la ecuación característica del sistema masa - resorte, de la que obtenemos:

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} \tag{6.11}$$

Cuyas raíces $\lambda_1 \ y \ \lambda_2$, están dadas por:

$$\lambda_1 = i\sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \lambda_2 = -i\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{6.12}$$

Estos dos valores de λ obviamente satisfacen la solución propuesta (b), Si introducimos la notación:

$$K/m = W^2 \tag{6.13}$$

Donde W es llamada frecuencia natural no amortiguada del sistema mecánico masa — resorte k, m son respectivamente la constante elástica del resorte y la masa del cuerpo.

Como la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, debe tener dos constantes arbitrarias de integración en la solución general, en consecuencia, podemos expresar la solución de la Ecuación (6.13) en la forma:

$$X(t) = D_1 e^{iwt} + D_2 e^{-iwt} \tag{6.14}$$

Aplicando las ecuaciones de Euler para expresar funciones exponenciales en términos de senos y cosenos:

$$e^{iwt} = \cos w\, t + isenwt \tag{6.15}$$

$$e^{-iwt} = \cos w\, t + isenwt \tag{6.16}$$

Bajo estas condiciones, la solución general x(t) de la ecuación (6.14) del movimiento periódico, para el sistema masa - resorte, resulta:

$$X(t) = D_1(\cos w\, t + isenwt) + D_2(\cos w\, t - isenwt)e^{iwt} = \cos w\, t + isenwt \tag{6.17}$$

O bien:

$$X(t) = i(D_1 - D_2)senwt + (D_1 + D_2)\cos w\, t \tag{6.18}$$

O también:

$$X(t) = Asenwt + B\cos w\, t \tag{6.19}$$

Donde:

$$A = i(D_1 - D_2), \quad B = D_1 + D_2 \tag{6.20}$$

Derivando la ecuación (6.19) respecto del tiempo t, obtenemos la velocidad instantánea del movimiento V = V(t), como sigue:

$$V(t) = A\ w\ \cos\ \ wt - B\ w\ sen\ wt \tag{6.21}$$

Para determinar las constantes A y B, debemos sustituir en las ecuaciones (6.20) y (6.21), las condiciones iniciales cuando Sustituyendo: en (6.19)

$$X(0) = X_0 = B \tag{6.22}$$

En (6.20):

$$\frac{V(0)}{w} = \frac{V_0}{w} = A \tag{6.23}$$

A partir de las condiciones iniciales las ecuaciones (6.19) y (6.21) pueden escribirse en la forma:

$$X(t) = \frac{V_0}{w} senwt + X_0 \cos w\, t \tag{6.24}$$

Y, además:

$$V(t) = V_0 = V_0 \cos w\, t - X_0 wsenwt \tag{6.25}$$

El movimiento periódico descrito por las ecuaciones (6.24) y (6.25) se llama movimiento armónico simple, y las mismas son válida para el caso en que la fuerza restauradora del sistema masa - resorte, se exprese únicamente como una función lineal de la posición.

La ecuación (6.24) puede también escribirse de modo equivalente en la forma:

$$X(t) = C \;\; \cos \;\; (wt + \Phi) \tag{6.26}$$

Siendo:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

Características del Movimiento Armónico Simple (MAS)

La ecuación (14) muestra claramente la naturaleza oscilatoria de la solución de la ecuación (9) llamada ecuación del movimiento armónico simple (M.A.S), describe una función cosenoidal de wt, donde K y m representan la constante elástica del resorte y la masa del cuerpo en movimiento vibratorio respectivamente.

La constante determina la posición horizontal de la función cosenoidal respecto al origen wt = 0, y se llama fase o ángulo de fase, se define como la distancia a la derecha de wt = 0, en donde la solución corta por primera vez el eje horizontal con pendiente positiva. Como muestra la figura 38. La constante positiva C. Se llama amplitud de la vibración, la cual se puede observar en la curva cosenoidal.

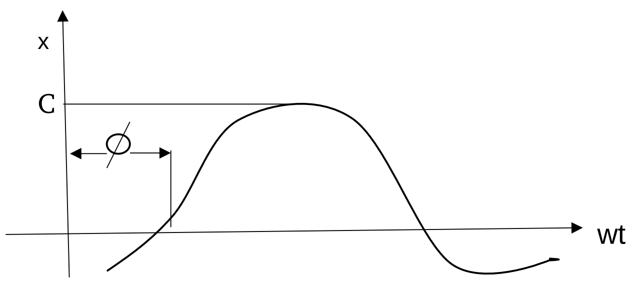


Figura 38. Movimiento armónico simple
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza. 2019.

Periodo del movimiento armónico simple

Es el tiempo necesario para que un movimiento periódico vuelva a repetirse. El periodo se denota por t y puede determinarse mediante la expresión:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m}} = \frac{2\pi}{w}\,\text{segundos} \tag{6.27}$$

Frecuencia del movimiento armónico simple

Es el número de ciclos completos por unidad de tiempo. La frecuencia se denota por f y se determina por:

$$f = \frac{1}{t} = \frac{\sqrt{k/m}}{2\pi} = \frac{w}{2\pi}\,\text{hertz} \tag{6.28}$$

Amplitud

Es la medida del máximo desplazamiento de la masa hacia cualquier lado de la posición de equilibrio.

Problema ilustrativo 1

Si en el caso del dispositivo de la figura 39 el período de vibración observado con un peso conocido P sobre el platillo es T_1 y el periodo observado con un peso conocido Q sobre el platillo es T_2. Hallar la constante k del resorte.

Solución:

Sabemos que el período de vibración del sistema masa-resorte bajo la acción de la carga estática P, está determinado por:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{gk/p}} \tag{a}$$

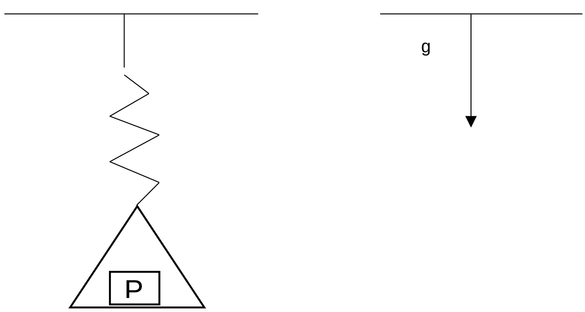


Figura 39. Representación del Sistema masa- resorte en vibración
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza. 2019.

Y el período de vibración del sistema bajo la carga estática Q, es:

$$an = V\dot{\theta} = \rho\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{\rho} = \frac{s^2}{\rho} \qquad \text{(b)}$$

En consecuencia, si elevamos al cuadrado las ecuaciones (a) y (b) restando luego miembro a miembro las expresiones resultantes, se obtiene la constante elástica del resorte:

$$\hat{r} \qquad \text{(c)}$$

Problema ilustrativo 2

El dispositivo de la figura 40 se emplea como acelerómetro y consiste en un émbolo A de 113.4 gr. que deforma un resorte cuando el conjunto toma una aceleración (a) hacia arriba. Determinar la constante K del resorte, que permitirá al émbolo deformarlo 0,64 cm, más allá de la posición de equilibrio y tocar el contacto eléctrico cuando la aceleración, cuyo aumento es uniforme y lento, alcance 5g. El rozamiento es despreciable.

Solución

Tomando la posición del equilibrio estático del émbolo apoyado sobre el resorte como origen y considerando que el émbolo A, está obligado a moverse verticalmente, tal como se indica en la figura 40. Si consideramos también que el extremo inferior del émbolo es una partícula en movimiento. Cuando el émbolo comprime el resorte se produce una fuerza que según la segunda Ley de Newton está dada por:

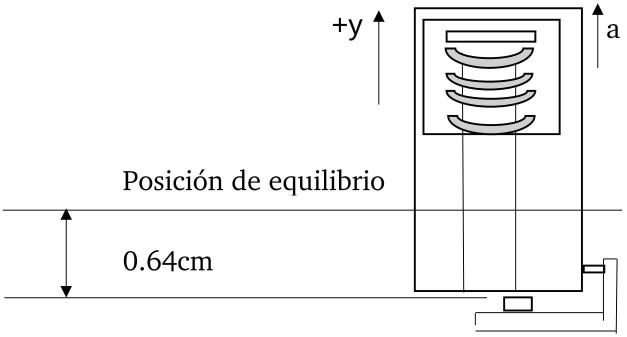


Figura 40. Representación del Movimiento del émbolo
Fuente: Dinámica de Sistemas, Katsuhiko Ogata.1995

Siendo y el desplazamiento hacia abajo más allá, de la posición de equilibrio. Cuando el desplazamiento del extremo inferior del émbolo es igual a -0.64 cms. que la aceleración alcance el valor de -5g., se tiene que:

$$\hat{e}_N \; \ddot{X} \; \hat{e}_t = \hat{e}_b$$

Problema ilustrativo 3

Un cuerpo de masa m y peso W está suspendido de dos resortes, que tienen respectivamente las constantes K_1 y K_2 "dispuestos en serie" como se indica en la figura 41 (a). Demuéstrese que la constante equivalente para el sistema es $K = \frac{K_1.K_2}{K_1+K_2}$. Demuéstrese que, si los resortes se disponen en paralelo, como se muestra en la figura (b) la constante de resorte equivalente es $K = K_1 + K_2$.

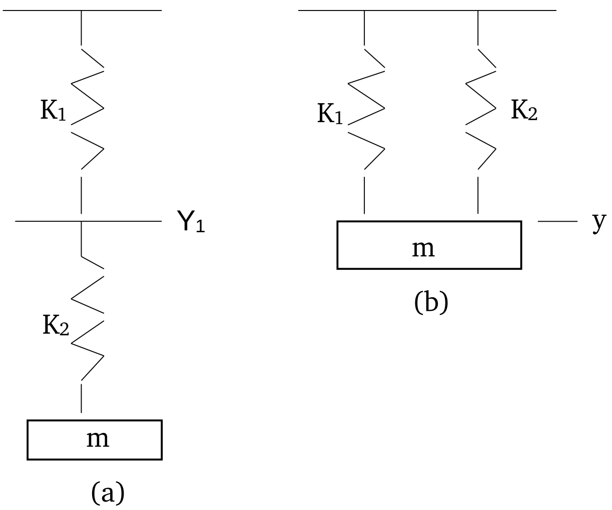


Figura 41. Representación del cuerpo suspendido de dos resortes
Fuente: Dinámica de Sistemas, Katsuhiko Ogata.1995

Solución

Refiriéndonos a la figura 41 (a), se observa que bajo la acción estática del peso W del cuerpo, el resorte constante de $K\ _1$sufre un alargamiento y_1, mientras que el extremo inferior del resorte de constante K_2 experimentara al mismo tiempo un desplazamiento y_2. Ver la figura (41). Por lo que la fuerza W en cada resorte es la misma y está determinada por las siguientes expresiones:

$$W = K_1\ y_2\ , \qquad W = K_2(y_2 - y_1) \tag{a}$$

Eliminando del sistema de ecuaciones (a) el desplazamiento y_1, obtenemos:

$$K_2 y_2 = W + \frac{K_2}{K_1} W = \frac{K_1 + K_2}{K_1} W \tag{b}$$

En consecuencia, la constante de resorte equivalente para el sistema de resorte dispuesto en serie es:

$$K = \frac{W}{y_2} = \frac{K_1.K_2}{K_1+K_2} = \frac{1}{\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}} \tag{c}$$

Para los resortes en paralelo figura 41 (b), se tiene igualmente que bajo la acción estática del peso W del cuerpo, ambos resortes sufrirán un desplazamiento igual a y. En consecuencia, la fuerza W sobre los dos resortes se obtiene de:

$$W = K_1\ y + K_2 y \quad \text{(d)}$$

O también:

$$W = (K_1\ + K_2)y = ky \quad \text{(e)}$$

Siendo $K = K_1\ + K_2$ la constante equivalente del resorte para el sistema mecánico, que consta de dos resortes dispuestos en paralelo.

Problema ilustrativo 4

En el sistema indicado en la figura 42, al extremo derecho del resorte de constante K_1 se le da un movimiento armónico $X_1 = e\,cos\,w\,t$. Determinar la ecuación diferencial del movimiento de la masa m.

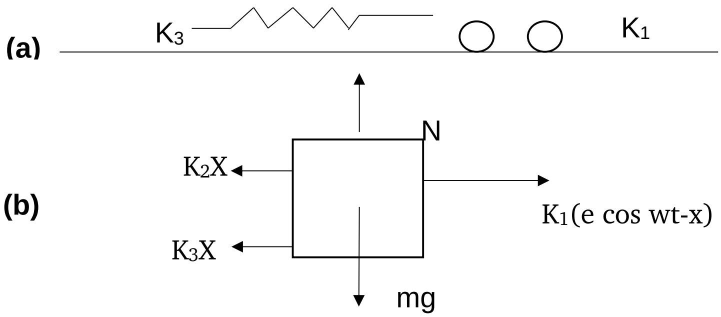


Figura 42. Representación del movimiento de un resorte con constante k1
Fuente: Fuente Dinámica de Sistemas, Katsuhiko Ogata.1995.

Solución:

Al producirse el desplazamiento $X_1 = e\,cos\,w\,t$. del extremo derecho del resorte de constante elástica K_1se genera automáticamente el desplazamiento X del extremo derecho de los resortes en paralelo que tienen constante elástica $K_2\ y\ K_3$, desplazamiento que es exactamente igual al sufrido por el extremo izquierdo del resorte de constante elástica K_1, ya que el bloque de masa m es rígido. En consecuencia, mediante la aplicación de la segunda Ley de Newton, se tiene que:

$$m\ddot{x} = K_1(e\,cos\,w\,t - x) - (K_2 + K_3)X \quad \text{(a)}$$

Conociendo que la constante equivalente de resorte K viene dada por $K = K_2 + K_3$, se puede reescribir (a) en la forma:

$$m\ddot{x} + (K + K_1)X = K_1 e\,cos\,w\,t \quad \text{(b)}$$

La ecuación diferencial (b), es la expresión que determina la ley de movimiento del sistema mecánico dado.

Movimiento rectilíneo – la fuerza resultante es una función de la velocidad

Existen muchos problemas en la dinámica de la partícula donde la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula no es constante, sino que depende de la rapidez con que esta se mueva, o sea F =F (v). Como ejemplo de tales problemas podemos mencionar aquellos que involucran fuerzas de arrastre aerodinámico, como es el caso, del movimiento de un avión o de un misil. Para tales movimientos rectilíneos particulares la segunda Ley de Newton puede escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} F(v) \tag{6.29}$$

Multiplicando el primer miembro de la ecuación (6.29) por dx/dx y luego separando variables, e integrando obtenemos:

$$X + C_2 = m \int_{v0}^{v} \frac{vdv}{F(v)} \tag{6.30}$$

Para calcular el valor de la constante C_1 vamos a utilizar las condiciones iniciales cuando $t = 0, X(0) = X_0, V(0) = V_0$, se tiene que $C_1 = -X_0$. Sustituyendo en la Ecuación (6.30), queda:

$$X = X_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{vdv}{F(v)} \tag{6.31}$$

Para obtener la expresión de la velocidad separamos las variables directamente de la expresión (6.30) y luego integramos, lográndose cuando $t = 0 \; hasta \; t \neq 0$

$$t = m \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{F(v)} \tag{6.32}$$

Una vez resuelta la integral del segundo miembro de la ecuación (6.32), se despeja y se obtienen la velocidad instantánea. Lo mismo puede ocurrir con la ecuación (6.31), si evaluamos la integral podemos luego despejar la velocidad instantánea resultando una expresión del tipo espacio-velocidad, Dependiendo de la naturaleza del problema, emplearemos una u otra ecuación resultando ser esencialmente ambas integrales, métodos alternativos para el cálculo de la rapidez.

Problema ilustrativo 1

Una partícula se mueve bajo la acción de fuerza $F = F\hat{\imath}$. La masa de acuerdo con la ecuación:

$$m = \frac{m_0}{[1 - V^2/C^2]^{1/2}},$$

Donde:

m_0 Es la masa en reposo y c es la velocidad de la luz.

Si la partícula parte del origen cuando t = 0 con velocidad cero, hallar la velocidad y el desplazamiento de m como una función de la fuerza y del tiempo t, ver representación en la figura 43.

Solución

Aplicando la segunda Ley de Newton al movimiento de la partícula, se puede escribir la ecuación diferencial ordinaria.

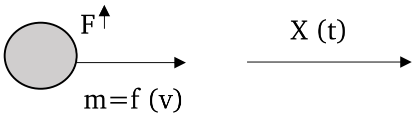


Figura 43. Representación del movimiento de la partícula bajo la acción de F
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza. 2019.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{1-V^2/c^2}}{m_0}F \qquad \text{(a)}$$

Separando las variables de la ecuación y luego integrando, se tiene:

$$t + c_1 = \frac{m_0 c}{F} arcsenV/C \qquad \text{(b)}$$

Para calcular el valor de la constante de integración C_1, usamos las condiciones iniciales cuando t=0, V (0) = 0, obteniéndose $C_1 = 0$. Sustituyendo este valor en la expresión (b), resulta:

$$arcsenV/C = \frac{Ft}{m_0 C} \qquad \text{(c)}$$

De la ecuación (c) puede verse que la fuerza es una función de la velocidad y del tiempo y de la misma puede deducirse que:

$$\vec{V} = Csen\left(\frac{Ft}{m_0 C}\right)\hat{\imath} \qquad \text{(d)}$$

Para hallar el desplazamiento de la partícula como una función del tiempo, multiplicamos el primer miembro de la ecuación (a) por dx/dx y luego separamos las variables X y V, lográndose:

$$dx = \frac{m_0 C}{F} = \frac{vdv}{\sqrt{C^2-V^2}} \qquad \text{(e)}$$

Integrando la ecuación (e), se tiene:

$$X + C_2 = \frac{m_0 C}{F}\left[-\sqrt{c^2+v^2}\right] \qquad \text{(f)}$$

C_2 se calcula considerando las condiciones iniciales cuando $t = 0, X_0 = V_0 = 0$
Se tiene $C_2 = -\frac{m_0 C^2}{F}$. Sustituyendo en (f), se llega a:

$$\vec{x} = \frac{m_0C^2}{F} - \frac{m_0C^2}{F}\sqrt{C^2 - C^2sen^2\left(\frac{Ft}{m_0C}\right)} \qquad (g)$$

De (g), puede expresarse en forma vectorial la ecuación:

$$\vec{x} = \frac{m_0C^2}{F}\left[1 - cos\left(\frac{Ft}{m_0C}\right)\right]\hat{\imath}$$

Problema ilustrativo 2

El vagón de ferrocarril de la figura 44, que se ha soltado de la locomotora se está moviendo con una rapidez V_o La resistencia del movimiento del vagón se debe principalmente al arrastre aerodinámico, que para esta rapidez es aproximadamente KV^2. Si el vagón tiene un peso W, ¿Qué distancia deberá recorrer antes de que su rapidez se reduzca a $0.6V_o$?

Solución

Aplicando la segunda Ley de Newton al movimiento del vagón en traslación rectilínea, se obtiene:

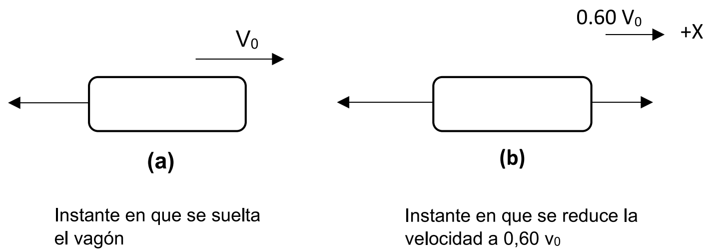


Figura 44. Representación del movimiento del vagón
Fuente: Dinámica de Sistemas, Katsuhiko Ogata. 1995.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{KV^2}{w/g} \qquad (a)$$

Separando las variables v y t de la ecuación diferencial (a), resulta:

$$dt = -\frac{Wdv}{gKV^2} \qquad (b)$$

Integrando la ecuación (b), en el intervalo de velocidades $V_0 \rightarrow V$, se obtiene:

$$t + C_1 = \frac{W}{gk}.\frac{1}{V} - \frac{W}{gk}.\frac{1}{V_0} \text{º} \qquad (c)$$

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales cuando $t = 0$, $V(0) = V_0$ se calcula $C_1 = 0$. Por lo que la expresión (c) toma la forma:

$$\frac{1}{V} = \frac{gK}{W}\left(\frac{W + gKV_0t}{gKV_0}\right) \qquad (d)$$

Reemplazando en la ecuación (d) a v por dx/dt, se obtiene:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{gK}{W}\left(\frac{W+gKV_0t}{gKV_0}\right) \qquad \text{(e)}$$

Separando las variables (x) y (t) de la ecuación (e), luego integrando, resulta:

$$g\frac{K}{W}X + C_2 = Ln\left(\frac{gKV_0}{W}t + 1\right) \qquad \text{(f)}$$

Sustituyendo en (f) las condiciones iniciales, se obtienen $C_2 = 0$. Reemplazando en la ecuación este valor, queda al despejar:

$$X = \frac{WLn\left(g\frac{KV_0}{W}t+1\right)}{gK} \qquad \text{(g)}$$

Para determinar el tiempo (t) necesario para que la velocidad se reduzca a 0.60 V_0, se sustituye este valor de la velocidad en la ecuación (d), obteniéndose

$$t = 0.67\frac{W}{gKV_0} \qquad \text{(h)}$$

Reemplazando el valor de (t), dado por la ecuación (h) en la expresión (g), obtenemos la distancia que deberá recorrer el vagón de que su rapidez, se reduzca a $0.60V_0$, así:

$$X = \frac{WLn(1.67)}{gK} = \frac{0.5108W}{gK} \qquad \text{(i)}$$

Movimiento rectilíneo en un medio resistente - la fuerza resultante es una función de la velocidad

Frecuentemente el ingeniero enfrenta problemas en los cuales, un cuerpo se mueve bajo la acción de una fuerza resultante que es una cierta función de la velocidad del cuerpo. Como ejemplo de esta clase de problemas podemos mencionar el movimiento rectilíneo de cuerpos que se mueven en un medio resistente.

Siempre que un cuerpo se encuentra en reposo, en un medio resistente, tal como un fluido-gas o líquido o en una superficie rugosa, la fuerza de resistencia del medio es nula. Sin embargo, cuando el cuerpo comienza a moverse, encontrará una fuerza de resistencia que se opone a su movimiento. Las "fuerzas de resistencia", representan formas de transferencia de energía de un cuerpo al medio resistente que lo rodea. Energía, que suele ser reducida a calor que fluye al medio ambiente. Ante la ausencia de otras fuerzas que promuevan el movimiento, terminará el cuerpo finalmente en reposo. De esta manera, si un sistema masa-resorte que oscila libremente en el aire, terminará en reposo en su “posición de equilibrio”, debido a que el sistema pierde gradualmente su energía. De igual a un ferrocarril eléctrico con sus razones, cuando encontrándose en movimiento se le suspende al suministro de energía eléctrica; disminuirá progresivamente su velocidad hasta detenerse finalmente, debido a las fuerzas de resistencia del aire y a la fricción de los rieles.

Algunas veces, las fuerzas resistentes actuantes sobre un cuerpo, son de magnitudes demasiado pequeñas para ser consideradas, si se le compara con otras fuerzas que también actúan sobre él. En este caso, las fuerzas resistentes pueden despreciarse, sin temor de cometer errores graves. Como ejemplo de esta situación, puede considerarse la caída de un cuerpo desde una altura relativamente pequeña sobre la superficie de la Tierra. Podemos suponer, que el cuerpo se mueve bajo la acción de una sola fuerza, concretamente la fuerza de la gravedad, despreciando de esta manera, la resistencia del aire.

No obstante, existen movimientos rectilíneos de cuerpos en ciertos medios fluidos, en los que la fuerza de resistencia produce un acentuado efecto sobre el movimiento. Como ilustración de este tipo de movimiento, podemos no obrar el de los aviones, misiles, barcos, el proceso de sedimentación de pequeños sólidos en un depósito de aguas tranquilas de una planta de tratamiento de agua, etc.

Cuanto mayor sea la rapidez con que se mueva un cuerpo en un medio resistente, mayor será la resistencia del medio al movimiento, o sea que, la fuerza de resistencia crecerá cuando aumente la velocidad del cuerpo. Este fenómeno se puede observar claramente, en un día en que no haya corriente de viento apreciable, si se desplazara un motorizado, cada vez con mayor rapidez, en una motocicleta.

Sabemos que la segunda Ley de Newton, enuncia la ecuación general del movimiento de una partícula y no la de un cuerpo. Sin embargo, esta ley puede aplicarse directamente al caso de traslación rectilínea de un cuerpo rígido, debido a que todas las partículas constituyentes del cuerpo tienen exactamente el mismo movimiento, por lo que, se puede considerar al cuerpo como una partícula ficticia de masa igual a la del cuerpo y ubicada en su centro de masa. A esta aplicación, no escapan los cuerpos que se mueven en traslación rectilínea en un medio resistente. Este es un problema tipo, del caso en que la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es cierta función de su velocidad.

Para determinar la expresión de la "fuerza de resistencia total", consideremos un sólido en movimiento a través de un medio resistente. Supongamos, 1) que la fuerza de resistencia total que actúa sobre el cuerpo es una función directamente proporcional a la magnitud de su velocidad relativa al medio resistente, y 2) que dicha fuerza resistente siempre se opone al movimiento, es decir, que tiene un sentido contrario al de la velocidad.

Si consideramos el caso de Cuerpos en movimiento con velocidades relativamente pequeñas, separadas entre sí, por una fina película de un fluido. Entonces la "fuerza de resistencia viscosa", tendrá un efecto predominante sobre el movimiento, dicho efecto será independiente de los materiales que componen los cuerpos, pero dependerá de la naturaleza del fluido lubricante y de la velocidad relativa de los cuerpos. Para el movimiento rectilíneo de un cuerpo dado, separado de otro por una fina película de fluido lubricante, la fuerza resistente es proporcional a la velocidad relativa de las superficies en contacto, o sea,

$$R = -\mu V \tag{6.33}$$

En donde μ ("mu" griega) es una constante de proporcionalidad llamada "coeficiente de viscosidad" o simplemente "viscosidad dinámica o absoluta". Este coeficiente es una constante para un fluido determinado, para una temperatura particular. Por lo tanto, μ es una cantidad escalar, que es una propiedad del fluido, que tiene como fórmula dimensional a $[FT/L^2]$ o $[M/LT]$. La ecuación (17) muestra que cuando no existe movimiento relativo entre las superficies de los cuerpos en contacto, la fuerza de resistencia viscosa es nula, independientemente del valor de μ.

Esta ley se aplica igualmente al movimiento de partículas de forma esférica, que caen a través de un fluido inicialmente en reposo bajo la acción de su propio peso. La esfera se acelera, hasta cuando la fuerza neta que actúa sobre ella se anula, es decir, hasta el momento en que su peso es equilibrado por la suma del empuje (boyantez) y la fuerza resistente causada por el flujo del fluido alrededor de la esfera. En ese instante, ya no es posible ninguna aceleración y, por lo tanto, se dice que la partícula ha alcanzado su "Velocidad terminal".

Se supone que, el movimiento de la esfera dentro del fluido es de tal manera, que las fuerzas de inercia (fuerzas requeridas para acelerar o desacelerar las partículas del fluido) son despreciables, en comparación con las fuerzas resistentes de la viscosidad, o lo que es lo mismo, el movimiento se analiza, sobre la base de que el número de Reynolds (Re) correspondiente, es lo suficientemente pequeño. Bajo estas hipótesis, Stokes encontró que la fuerza de resistencia que se opone al movimiento, viene dada por:

$$R = -3\ \pi\, d\ \mu V \tag{6.34}$$

En donde d es el diámetro de la esfera, V la velocidad relativa de la esfera con relación al fluido no perturbado, y μ representa el valor de la viscosidad dinámica o absoluta del fluido, como lo representa la figura 45.

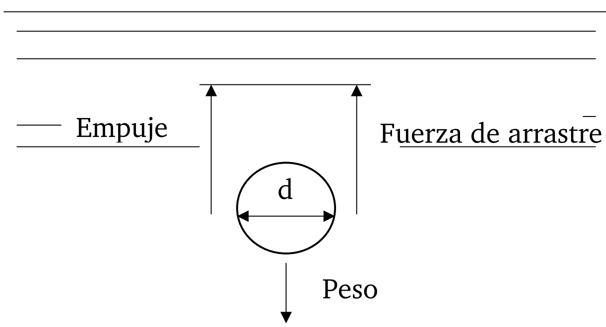


Figura 45. Movimiento de la esfera en un medio resistente
Fuente: Dinámica de Sistemas, Katsuhiko Ogata. 1995

Es oportuno aclarar, que la ley de Stokes es válida para valores del número de Reynolds: $Re = \rho Vd/\mu = Vd/v < 0.1$ siendo ρ la densidad del fluido y $v = \mu/\rho$ la "viscosidad cinemática". Es evidente que un valor alto de ρ, d o V o es su defecto, un valor pequeño de μ producción un valor alto de Re. Así mismo, unas densidades bajas a una viscosidad dinámica alta producirán un valor bajo de Re. La suposición de que las fuerzas de inercia, puedan ser despreciables requiere que el número de Reynolds sea menor que 0.1 ($Re < 0.1$). Un valor alto de Re, significa que las fuerzas de inercia predominan en el flujo, mientras que las fuerzas resistentes viscosas son despreciables. Sin embargo, cuando Re tiene un valor relativamente pequeño, la fuerza de resistencia viscosa domina el flujo y las fuerzas de inercia se hacen despreciables. Todo esto, es debido a que las fuerzas de resistencia viscosa son proporcionales a la viscosidad μ y las fuerzas de inercia que causan la aceleración del fluido lo son, a la densidad ρ. A menudo se involucra en los problemas de movimiento en un medio resistente fluido a la relación $v = \mu/\rho$, que es la llamada viscosidad cinemática, relación que hoy en día, ha sido considerada como una propiedad del fluido; y que tiene una fórmula dimensional:

$$\left[\frac{M/LT}{M/L^3}\right] = \left[\frac{L^2}{T}\right]$$

Para calcular la "velocidad terminal" de una pequeña esfera en movimiento en un fluido resistente en reposo, sobre el supuesto de que el número de Reynolds es lo suficientemente pequeño, como para que la ley de Stokes sea válida, siendo ρ y ρ_2 respectivamente las densidades del fluido y de la esfera. Se establece la condición de equilibrio en la figura 46 igualando el peso de la esfera, a la suma del empuje (boyantez) y la fuerza de resistencia viscosa de la siguiente manera:

$$\frac{\pi}{6} d^3 \rho_s g = \frac{\pi}{6} d^3 \rho_s g + 3\pi d\mu V \qquad (6.35)$$

De donde, se obtiene:

$$V = \frac{d^2(\rho_s - \rho)g}{18\mu} \qquad (6.36)$$

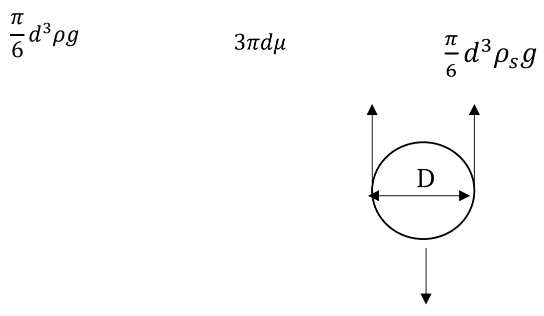


Figura 46. Condición de equilibrio de la esfera
Fuente: Dinámica de Sistemas, Katsuhiko Ogata.1995

La ecuación (b) también está sujeta a la limitación Re < 0.1. Esta ecuación nos muestra que la velocidad terminal crece con el cuadrado del diámetro de la esfera y decrece con la viscosidad dinámica. Este hecho, es fácilmente observable, mientras se ejecutan los experimentos del caso.

La Ley de Stokes, puede aplicarse también a la solución de problemas que se refieran al depósito de pequeños sólidos en el medio agua y al vapor de agua en la atmósfera, si estos elementos se consideran esferas pulidas.

Un cuerpo sólido que se mueve en un medio fluido de densidad ρ grandes velocidades, experimenta una resistencia a su movimiento. Newton fue el primero en proponer una expresión matemática, para determinar la fuerza resistente en tales casos. Él dedujo que en la unidad de tiempo un cuerpo de sección A, normal a la dirección del movimiento, transmite su propia velocidad a una masa de fluido (condición de no deslizamiento). Para evaluar dicha masa, consideremos la sección A dividida en elementos diferenciales de área dA. Entonces, la masa con velocidad V que, se desplaza a través del elemento diferencia del área dA es vdA, por lo que en la unidad de tiempo la sección A, le comunica su propia velocidad a una masa total determinada por la expresión:

$$\int_A \rho V da = \rho A V \tag{6.37}$$

Ahora, debido a que la fuerza necesaria para hacer esta operación es proporcional a la variación de la cantidad de movimiento lineal, Newton pudo escribir la expresión:

$$R = \frac{d\vec{p}}{dt} = (\rho A V)V \tag{6.38}$$

La expresión (6.38) permitió a Newton, deducir que la fuerza resistente al movimiento rectilíneo de un cuerpo dado, a través de un medio resistente fluido es directamente proporcional al cuadrado de la magnitud de su velocidad. Utilizando estas consideraciones, Newton encontró que la fuerza que se opone al movimiento de traslación rectilínea del cuerpo tiene el valor.

$$R = C\frac{1}{2}\rho A V^2 = -CKV^2 \tag{6.39}$$

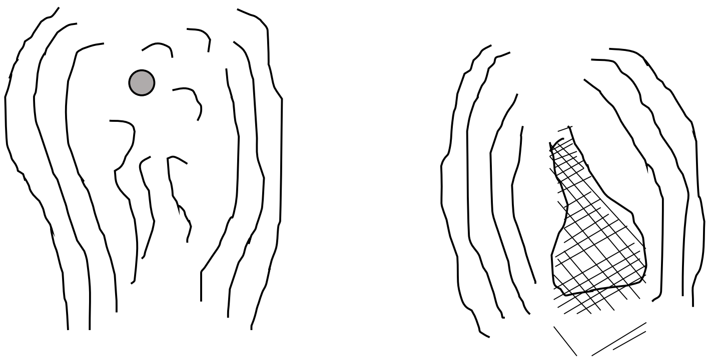
La ecuación (19) es la llamada ley cuadrática de resistencia", donde $K = \frac{1}{2}\rho A \ y \ C$ una constante o coeficiente de resistencia, cuyo valor aumenta considerablemente al pasar de velocidades inferiores a la del sonido o a velocidades superiores, hasta llegar a tender a hacerse constante para velocidades relativamente altas; en realidad, un estudio más minucioso del coeficiente C, está fuera del alcance del capítulo.

Cuando el medio fluido resistente es el aire, al caer un cuerpo de masa m con movimiento rectilíneo se mueve realmente bajo la acción de dos fuerzas. Una es la fuerza de gravedad mg y la otra es una fuerza de resistencia del aire que se opone a la caída del cuerpo.

Cuanto mayor sea la rapidez de caída del cuerpo, tanto mayor será la resistencia del aire. Experimentalmente se ha comprobado que a velocidades no mayores de 2 m/s. La fuerza de resistencia del aire es proporcional a la rapidez. Luego:

$$R = -bV \qquad (6.40)$$

Donde V es la velocidad de caída del cuerpo, b un coeficiente de proporcionalidad que depende del tamaño y de la forma del cuerpo y el signo menos significa que la fuerza de resistencia R se opone al movimiento ver figura 47.



(a) Fuerza esférica
Resf: fuerza de resistencia

(b) Cuerpo fusiforme
Rfus: fuerza de resistencia

Fig.47. Rapidez de caída de un cuerpo con la resistencia del aire
Fuente: Dinámica de Sistemas, Katsuhiko Ogata. 1995

Para una misma velocidad de caída V e igual sección transversal de la esfera y el cuerpo fusiforme, se tiene aproximadamente que:

$$Resf \approx Rfus \qquad (6.41)$$

Si las velocidades de caída del cuerpo, son mayores de 2 m/s, entonces la magnitud de la fuerza de resistencia del aire se hace mucho mayor que bV y se considera directamente proporcional al cuadrado de la rapidez, la que adquiere el valor:

$$R = -b\ V^2 \qquad (6.42)$$

En general, las ecuaciones (20) y (21) pueden ser representadas por una expresión única, en la forma:

$$R = -b\ V^n \qquad (6.43)$$

Siendo n un número cuya magnitud dependerá de la velocidad. Cuando V está comprendida entre 1 y 2 m/s, se dice que el flujo es laminar y el valor de n es aproximadamente 1; mientras que, si la velocidad es mayor de 2 m/s, entonces la magnitud de la fuerza de resistencia del aire crece, en este, se considera que el flujo es turbulento y el número n se aproxima al valor 2. En resumen:

$V \quad \leq \quad 2m/s, \quad R = \quad -bV$ (flujo laminar)

V < 2m/s, R = $-bV^2$ (flujo turbulento)

También se ha comprobado experimentalmente, que la velocidad de un cuerpo en caída libre, se aproxima a una "velocidad terminal", ver figura 48. En otras palabras, después de cierto tiempo durante la caída el movimiento rectilíneo del cuerpo, se hace uniforme y por supuesto su aceleración, se anula. Esto quiere decir, que la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo se hace igual a cero y se dice entonces, que el cuerpo ha alcanzado su velocidad terminal (velocidad uniforme), ya que la fuerza de gravedad mg es "equilibrada" por la fuerza resistente del aire, o sea, que para el caso en que la velocidad V < 2 m/s y existe equilibrio dinámico, se satisface

$$mg = Bv \tag{6.44}$$

Por lo tanto,

$$X \frac{nb^2}{2F_0} Ln \frac{V_0^2 - b^2}{V^2 - b^2} \tag{6.45}$$

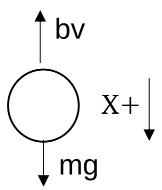


Fig.48. Diagrama de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo con resistencia al aire
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Siendo V la velocidad terminal uniforme. Si existe el equilibrio dinámico, la segunda Ley de Newton establece que:

$$\hat{N} \tag{6.46}$$

Que es la ecuación del movimiento, antes del equilibrio.

Movimiento rectilíneo - la resultante es una función de la fuerza resistente y/o una combinación n de está con otras fuerzas

Se ha estudiado distintos tipos de fuerzas resistentes al movimiento rectilíneo de los cuerpos rígidos. También, la traslación rectilínea de los cuerpos rígidos que puede ser considerada como el movimiento rectilíneo de una partícula ficticia de masa igual a la del cuerpo y ubicada en su centro de masa.

En la mayoría de los problemas objeto de la referencia la fuerza resistente, actúa un cuerpo o partícula en combinación con algunas otras fuerzas, es decir, la resultante de todas las fuerzas que intervienen, puede depender de una fuerza constante o de las variables tiempo, desplazamiento, velocidad o de una combinación de fuerzas que son funciones de dichos parámetros.

Existen muchos problemas de movimiento rectilíneo en los que actúan fuerzas que son una función de dos o más variables como las señaladas anteriormente donde no es posible separarlas, situación está, que complica la solución de los problemas. Sin embargo, para una mejor comprensión de algunos casos que se presentan con mucha frecuencia, se procede a ilustrarlos a continuación.

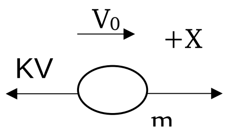
Movimiento rectilíneo - la fuerza resultante es la resistencia viscosa

En general, la fuerza de resistencia viscosa puede expresarse en la forma.

$$R = -kV \tag{6.47}$$

La figura 49 muestra una partícula de masa m animada de movimiento rectilíneo bajo la resistencia viscosa -KV como fuerza única Si se aplica la segunda Ley de Newton al movimiento en forma diferencial, obtenemos:

$$m\frac{dv}{dt} = -KV \tag{6.48}$$



(a)

Fig.49. Partícula de masa m bajo resistencia viscosa
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Separando variables de la expresión (b) e integrando luego, queda:

$$t = -\frac{m}{K}\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} = -\frac{m}{K}(LnV - LnV_0) \tag{6.49}$$

De (c) aplicando el concepto de logaritmo, se deduce

$$V = V_0 e^{-K/mt} \tag{6.50}$$

Para obtener la ecuación que determina la posición de la partícula en cualquier instante expresemos la velocidad V de la ecuación (23) en la forma dx/dt, Luego se separan las variables y se integra, resultando:

$$X + C_1 = -\frac{K}{m}V_0 e^{-K/mt} \tag{6.51}$$

Para calcular C_1vamos a considerar las condiciones iniciales cuando $t = 0, X(0) = X_0 V(0) = 0$ y se obtienen $C_1 = V_0\ K/m.$ Reemplazando este valor en la expresión (6.51) se obtiene finalmente.

$$X = V_0\frac{K}{m}\left(1 - e^{-\frac{K}{m}t}\right) \tag{6.52}$$

Movimiento rectilíneo – la fuerza resultante es la resistencia cuadrática

La figura 50 muestra una partícula de masa m con movimiento rectilíneo con velocidad inicial V_0, bajo la acción única de la resistencia cuadrática. Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento de la partícula, se obtiene:

$$m\frac{dv}{dt} = -CKV^2 \tag{6.53}$$

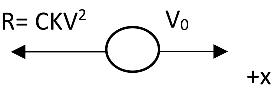


Figura 50. Movimiento rectilíneo de una partícula con velocidad inicial V_0
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza. 2019.

Separando variables de la ecuación (a) e integrando, obtenemos:

$$t = -\frac{m}{CK}\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v^2} \tag{6.54}$$

Resolviendo la integral en (b), se tiene

$$t = -\frac{m}{CK}\left[\frac{1}{V} - \frac{1}{V_0}\right] \tag{6.55}$$

Despejando la expresión (6.53) la velocidad V, se obtiene la relación velocidad-tiempo dada por:

$$V = -\frac{V_0}{\left(1+\frac{V_0CKt}{m}\right)} \tag{6.56}$$

Para conseguir una relación desplazamiento-velocidad, vamos a retomar la expresión (a), cuyo primer miembro lo vamos a multiplicar por dx/dx aplicando la regla de cadena y luego separamos variable e integramos, resultando.

$$X = -\frac{m}{CK}\int_{v_0}^{v}\frac{dV}{V} \tag{6.57}$$

Resolviendo la integral del segundo miembro de la ecuación (6.57), queda:

$$X = \frac{m}{CK}Ln\left(\frac{V_0}{V}\right) \tag{6.58}$$

Aplicando a la ecuación (6.58) la definición de logaritmo, se tiene

$$\frac{V_0}{V} = e^{\frac{CK}{m}x} \tag{6.59}$$

De (6.59) se deduce que

$$V = V_0e^{\frac{CK}{m}x} \tag{6.60}$$

Para hallar una expresión general posición-tiempo, o sea X =f(t), vamos a sustituir el valor de la velocidad V dado por la Ecuación (6.58) en la fórmula (6.60), lográndose.

$$X = \frac{m}{CK} Ln \frac{V_0}{\frac{V_0}{1+V_0\frac{CK}{m}t}} \qquad (6.61)$$

Ecuación que finalmente puede reducirse a

$$x = \frac{m}{CK} Ln\left(1 + V_0 \frac{CK}{m} t\right) \qquad (6.62)$$

Movimiento rectilíneo- la fuerza resultante es una función de la fuerza constante y de la resistencia viscosa

El esquema 51 muestra una partícula de masa m, con movimiento rectilíneo bajo la acción de dos fuerzas: una constante dada y otra que es la función de resistencia viscosa KV.

La ecuación diferencial general del movimiento de la partícula resulta ser entonces:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_0}{m} - \frac{KV}{m}$$

Siendo Fo/m la aceleración producida por la fuerza de magnitud y dirección constante Fo y es una resistencia que se opone al movimiento y que depende fundamentalmente de la velocidad. Separando las variables t y V de la ecuación (a) e integrando, queda

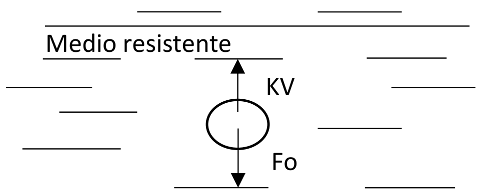


Figura 51. Partícula con movimiento rectilíneo bajo la acción de dos fuerzas
Fuente: Dinámica de Sistemas, Katsuhiko Ogata.1995

$$X = \frac{m}{CK} Ln\left(1 + V_0 \frac{CK}{m} t\right) \qquad (6.63)$$

Para obtener el valor numérico de la constante de integración C_1 consideramos las condiciones iniciales cuando $t = 0,\ X(0) = X_0,\ V(0) = V_0$ obteniéndose al reemplazar que $C_1 = 0$. Sustituyendo en la expresión (b), queda

$$\hat{b} = \hat{t}XN \qquad (6.64)$$

Resolviendo la integral de la expresión (6.64), tenemos:

$$m\frac{dv}{dt} = -CKV^2 \tag{6.65}$$

Siendo V_0 la velocidad inicial y V la velocidad un instante t cualquiera, la Ecuación (6.64) después de aplicar la definición de logaritmo, se puede escribir en la forma general:

$$\vec{a} \qquad t \tag{6.66}$$

La ecuación general (6.65) relaciona la velocidad instantánea con el tiempo. Si sustituimos en esta expresión a V como la derivada de la posición respecto del tiempo (dx/dt), separando las variables X y T y volviendo a integrar, queda

$$x + C_2 = \frac{F_0 t}{K} - \frac{m}{K}\left(\frac{F_0}{K} - V_0\right)\left(1 - e^{\frac{-Kt}{m}}\right) \tag{6.67}$$

Sí sustituirnos en la expresión (d) las condiciones iniciales cuando $t = 0,\ X(0) = 0, V(0) = V_0$se tiene que $C_2 = 0$. Reemplazando el valor de C_2en (6.67), resulta

$$x = \frac{F_0}{K}t - \frac{m}{K}\left(\frac{F_0}{K} - V_0\right)\left(1 - e^{\frac{-Kt}{m}}\right) \tag{6.68}$$

La expresión (6.68) constituye la ecuación general del movimiento rectilíneo de una partícula en un medio viscoso que además está sometida a la acción de una fuerza constante F_0.

Movimiento rectilíneo – la fuerza resultante es una función de una fuerza, constante y la cuadrática de la resistencia

Los esquemas que se muestran representan una partícula de masa m con movimiento rectilíneo bajo la acción de dos fuerzas: una constante F_0 y la otra la Ley cuadrática de la resistencia CKV^2. En la figura 52 (a) la fuerza constante tiene como sentido el mismo del movimiento, o sea $F_0 > 0$, mientras que en la figura (b) la fuerza constante F_0 se opone al movimiento rectilíneo de la partícula al igual que la resistencia. Seguidamente vamos a resolver el primer caso, en el cual la ecuación diferencial del movimiento toma la forma

$$m\frac{dv}{dt} = F_0 - CKV^2 \tag{6.69}$$

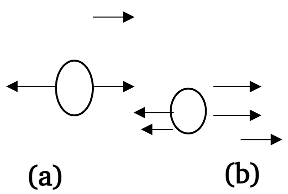


Figura 52. Partícula con movimiento rectilíneo bajo la acción de dos fuerzas
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Separando las variables v y t de la expresión (6.69) integrando después, obtenemos

$$t = m\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{F_0 - CKV^2} \tag{6.70}$$

Si hacemos en la expresión (6.70) a $\frac{F_0}{CK} = b^2$,

$$t = \frac{mh^2}{F_0}\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{b^2 - V^2} \tag{6.71}$$

Resolviendo la integral, se obtiene

$$t = \frac{mb}{F_0} arctgh\left[\frac{v}{b}\right]_{v_0}^{v} = \frac{mb}{F_0}\left[arctgh\left(\frac{v}{b}\right) - arctgh\left(\frac{v_0}{b}\right)\right] \tag{6.72}$$

Para calcular la posición de la partícula, vamos a multiplicar al primer miembro de la ecuación(a) por dx/dx, separamos las variables x y v luego integramos, obteniéndose:

$$X = m\int\frac{vdv}{F_0 - CKV^2} \tag{6.73}$$

Dividiendo el numerador y denominador del segundo miembro de la ecuación (d) por CK y teniendo en cuenta que $\frac{F_0}{CK} = b^2$ se sustituye su valor en la integral y queda

$$X = \frac{mb^2}{F_0}\int_{v_0}^{v}\frac{vdv}{b^2 - V^2} \tag{6.74}$$

Resolviendo la integral del segundo miembro, de la expresión (e), resulta

$$X = \frac{mb^2}{2F_0} Ln[V^2 - b^2]_{v_0}^{v} = \frac{mb^2}{2F_0}\left[Ln(V_0^2 - b^2) - Ln(V_0^2 - b^2)\right]$$

O en forma equivalente

$$X = \frac{mb^2}{2F_0} Ln\frac{V_0^2 - b^2}{V^2 - b^2} \tag{6.75}$$

Para el caso particular en que la velocidad inicial de la partícula sea nula ($V_0 = 0$) las ecuaciones (6.74) y (6.75) toman respectivamente los valores para la velocidad y el desplazamiento dados por las fórmulas

$$V = btgh\left(\frac{F_0 t}{mb}\right) \tag{6.76}$$

Y, además

$$X = \frac{mb^2}{2F_0} Ln\frac{b^2}{b^2 - v^2} \tag{6.77}$$

Siendo $b^2 = \frac{F_0}{CK}$. El sistema de ecuaciones (6.76) y (6.77) nos permiten expresar la posición de la partícula como una función del tiempo X = f(t). Si reemplazamos en la expresión (31a) el valor de la velocidad dado por (30a), resulta

$$X = \frac{mb^2}{2F_0} Ln \frac{1}{1 - tgh^2\left(\frac{F_0 t}{mb}\right)} \tag{6.78}$$

O también,

$$X = \frac{mb^2}{2F_0} Ln \frac{1}{sech^2\left(\frac{F_0 t}{mb}\right)}$$

O en forma equivalente,

$$X = \frac{mb^2}{F_0} Ln\, cos^2\, h\left(\frac{F_0 t}{mb}\right) \tag{6.79}$$

Cuando la fuerza constante al igual que la resistencia también se opone al movimiento de la partícula, como se ilustra en el esquema (b), la ecuación diferencial del movimiento se expresa en la forma

$$m\frac{dv}{dt} = -F_0 - CKV^2 \tag{6.80}$$

Para determinar el parámetro tiempo, separamos las variables t y v de la expresión (6.80) y posteriormente integramos, resultando

$$t = -\int \frac{dv}{F_0 + CKV^2} \tag{6.81}$$

Haciendo igual que en el primer caso, $b^2 = F_0/CK$ y dividimos el segundo miembro de la Ecuación (6.81) por CK, queda

$$t = -\frac{mb^2}{F_0}\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{b^2 + v^2} \tag{6.82}$$

Resolviendo la integral del segundo miembro de la Ecuación (6.82) se puede escribir:

$$t = \frac{mb}{F_0}\left[arctg\left(\frac{v_0}{b}\right) - arctg\left(\frac{v}{b}\right)\right] \tag{6.83}$$

Para obtener la velocidad instantánea de la partícula se despeja V. La ecuación que permite tener la posición de la partícula en cualquier instante se obtiene multiplicando por dx/dx, separando variables e integrando, queda

$$X = -\frac{mb^2}{F_0}\int_{v_0}^{v} \frac{Vdv}{b^2 + v^2} \tag{6.84}$$

Resolviendo la integral del segundo miembro, tenemos:

$$X = -\frac{mb^2}{2F_0} Ln(b^2 + V^2)_{v_0}^{v} = \frac{mb^2}{2F_0} Ln\frac{b^2 + v_0^2}{b^2 + v^2} \tag{6.85}$$

El tiempo que tardará la partícula en detenerse y el desplazamiento total recorrido, se calculan cuando en las ecuaciones (6.84) y (6.85) la velocidad instantánea V se anula, o sea

$$t = \frac{mb}{F_0}\left[arctg\left(\frac{v_0}{b}\right)\right] \quad (6.86)$$

Y,

$$X = \frac{mb^2}{2F_0} Ln \frac{b^2+v_0^2}{b^2} \quad (6.87)$$

Problema ilustrativo 1

Una partícula de peso W está cayendo verticalmente a través de un medio resistente, tal como lo muestra la figura 53. La fuerza de fricción ejerce un arrastre que es proporcional a la velocidad de la partícula, es decir, F = - KV, en donde K es una constante de proporcionalidad que debe determinarse experimentalmente para la partícula y el medio en cuestión. Dado que la partícula parte del reposo en la superficie del medio resistente, determinar su velocidad como función del tiempo.

Solución

El problema es del tipo de movimiento rectilíneo de una partícula bajo la acción de una fuerza constante que es el peso W y otra que es la resistencia viscosa. Por lo tanto, la ecuación diferencial del movimiento rectilíneo de la partícula es

$$\frac{dv}{dt} = \frac{w}{m} - \frac{K}{m}v \quad (a)$$

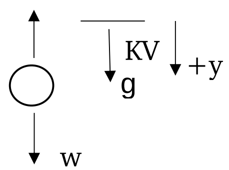


Figura 53. Partícula con peso W a través de un medio resistente
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza. 2019.

Aplicando al movimiento de la partícula la ecuación (27), podemos calcular el tiempo, según la expresión general

$$t = \frac{\frac{w}{g}}{K} Ln = \frac{w-KV_0}{w-KV} \quad (b)$$

Pero como la partícula parle del reposo en la superficie del medio, entonces $V_0 = 0$, por lo que la expresión (b) se transforma al aplicar la definición de logaritmo neperiano en

$$\frac{w}{w-KV} = e^{\frac{K}{W}gt} \quad (c)$$

Despejando la velocidad de la ecuación (c), obtenemos:

$$V = \frac{w}{K} - \frac{w}{K}e^{-\frac{K}{w}gt} = \frac{w}{K}\left(1 - e^{-\frac{K}{w}gt}\right)$$

Problema ilustrativo 2

Determinar la velocidad y el desplazamiento de una partícula de peso W que está cayendo verticalmente a través de un medio resistente de la figura 54. La fuerza de fricción ejerce un arrastre que es proporcional al cuadrado de la velocidad, es decir, $F = -KV^2$ (ver problema anterior).

Solución

Como la fuerza de resistencia (arrastre) es proporcional al cuadrado de la velocidad, entonces la ecuación diferencial del movimiento rectilíneo de la partícula adopta la forma

$$\frac{dv}{dt} = \frac{w}{m} - \frac{K}{m}v^2 \qquad \text{(a)}$$

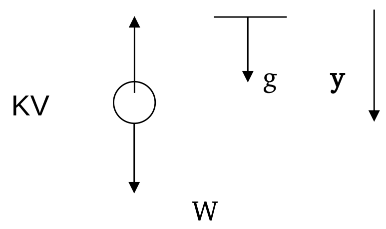


Figura 54. Partícula con peso W que cae verticalmente
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza. 2019.

Como el movimiento rectilíneo es del tipo, donde la fuerza resultante es una función de una fuerza constante y además de la ley cuadrática de la resistencia, entonces se puede aplicar la ecuación (29), para obtener la expresión general del tiempo, así

$$t = \frac{\frac{w}{g}\sqrt{\frac{W}{K}}}{W} = \left[arctgh\left(\frac{V}{\sqrt{\frac{W}{K}}}\right) - arctgh\left(\frac{V_0}{\sqrt{\frac{W}{K}}}\right)\right] \qquad \text{(b)}$$

Como la partícula parte del reposo, entonces la expresión (b) se reduce

$$t = \frac{\sqrt{\frac{W}{K}}}{g}arctgh\left(\frac{V}{\sqrt{\frac{W}{K}}}\right) \qquad \text{(c)}$$

Despejando la velocidad de la ecuación (c), queda

$$V = \sqrt{\frac{W}{K}}tgh\sqrt{\frac{K}{w}}gt \qquad \text{(d)}$$

Para determinar el desplazamiento, debemos tener en cuenta que la velocidad inicial es nula ($V_0 = 0$), y por lo tanto, puede aplicarse directamente la ecuación (30b), la cual nos permita expresar la posición en función del tiempo, o sea, x = x(t) en la forma

$$X = \frac{F_0}{K}t - \frac{m}{K}\left(\frac{F_0}{K} - V_0\right)\left(1 - e^{\frac{-Kt}{m}}\right) \qquad \text{(e)}$$

De donde:

$$\hat{e} \qquad _N \qquad \text{(f)}$$

Problema ilustrativo 3

El movimiento rectilíneo de una partícula en un medio resistente está descrito por la ecuación $S = -K(s)^n$. Si la partícula partiera con una velocidad inicial $S_0 = V_0$, determinar el dominio de n a condición de que la partícula pueda detenerse en un periodo finito de tiempo. Determinar el valor de dicho tiempo, ver la representación en la figura 55.

Solución:

La ecuación diferencial del movimiento rectilíneo de la partícula, bajo la acción de una fuerza única originada por el medio resistente está descrito por:

$$\vec{F} \qquad \text{(a)}$$

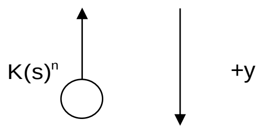


Figura 55. Partícula con peso W con una velocidad inicial $S_0 = V_0$
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Separando variables e integrando, obtenemos

$$t = -\frac{1}{K}\int_{v_0}^{v} \frac{d\dot{s}}{\dot{s}n} \qquad \text{(b)}$$

Para determinar el dominio de n bajo la condición de que la partícula pueda detenerse resolvemos la integral del segundo miembro de (b).

$$t = -\frac{1}{K}\int_{v_0}^{v} \frac{d\dot{s}}{\dot{s}n} = \frac{1}{K}\left[\frac{V^{1-n}}{1-n}\right]_0^{v_0} = \frac{V_0^{1-n}}{(1-n)k}$$

Por lo tanto, para que (t) tenga un valor real y finito debe cumplirse que: n ≤ y 1 el tiempo que se requiere para que se detenga la partícula es: $m\frac{dv}{dt} = F_0 - CKV^2$

Problema ilustrativo 4

¿Cuál será el diámetro máximo de una partícula de polvo esférica de densidad 2500 Kg/m^3 que se asentará en la atmósfera (densidad 1.225 Kg/m^3 viscosidad cinemática 14.9 mm^2/s) de buen acuerdo con la ley de Stokes? ¿Cuál será su velocidad terminal de asentamiento?, representados en la figura 56.

Solución

Evidentemente el problema es del tipo donde la partícula de polvo esférica está sometida a la acción de una fuerza resultante que es una función de una fuerza constante representada por el empuje y el peso de la partícula y otra la resistencia viscosa, por lo tanto, la ecuación diferencial del movimiento rectilíneo de la partícula es:

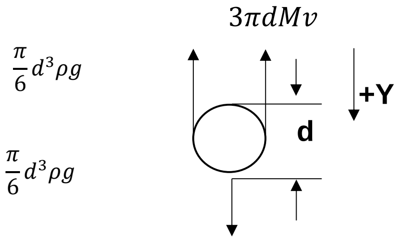


Figura 56. Diámetro máximo de una partícula de polvo en la atmósfera
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza. 2019.

$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{\frac{\pi}{6}}{m} d^3\rho_3 g - \frac{\frac{\pi}{6}}{m} d^3\rho_3 g\right) - \frac{3\pi}{m} d\mu V \qquad \text{(a)}$$

Cuando la partícula de polvo ha alcanzado la velocidad terminal, la aceleración se anula, o sea dv/dt = 0, entonces la expresión (a) a partir de ese instante se transforma en

$$0 = \left(\frac{\frac{\pi}{6}}{m} d^3\rho_3 g - \frac{\frac{\pi}{6}}{m} d^3\rho g\right) - \frac{3\pi}{m} d\mu V \qquad \text{(b)}$$

La expresión (c) nos dice, que cuando el peso de la esfera de polvo se hace igual a la fuerza total dirigida hacia arriba es porque se ha logrado la velocidad terminal (uniforme). De la ecuación (c) se obtiene la velocidad terminal despejando y reemplazando, así:

$$V = \frac{d^2(\rho_3 - \rho)g}{18\mu} = \frac{d^2(2500 - 1.22^5)\left(\frac{kg}{m^3}\right)9.81\frac{m}{s^2}}{18\times 1.22^5\left(\frac{kg}{m^3}\right)14.9\times 10^{-6}\left(\frac{m^2}{s}\right)} = 74.61\times 10^6 d^2 \qquad \text{(d)}$$

Pero también la ley de resistencia de Stokes para pequeñas esferas pulidas es válida para valores del número de Reynolds$Re = \rho V d/\mu = V/\nu \leq 0.1$ siendo ρ la densidad del medio resistente y ν la viscosidad cinemática. El máximo diámetro de la partícula se obtiene evidentemente cuando a Re se le asigna un máximo valor, Re = 0.1 para que de esta manera predomine la resistencia viscosa, por lo tanto:

$$\frac{Vd}{V} = 0.1 \qquad \text{(e)}$$

O en forma equivalente reemplazando los valores en (e) y despejando, resulta

$$V = \frac{1.49\times10^{-6}}{d} \qquad \text{(f)}$$

Igualando las dos expresiones de la velocidad terminal dadas por (d) y (f), queda:

$$74.61 \times 10^{-6} d^2 = \frac{1.49\times10^{-6}}{d}$$

De donde:

$$d^3 = 0.01997 \times 10^{-12} m^3$$

Por lo que el diámetro máximo de la esfera de polvo es

$$d_{máx.} = 27.13\mu m \qquad \text{(g)}$$

Para calcular la velocidad terminal de la partícula esférica, sustituimos el valor del diámetro máximo en la expresión (f), lográndose:

$$V = \frac{1.49\times10^{-6}}{27.13\times10^{-6}} = 0.0549\frac{m}{s}$$

Método de la fuerza masa y aceleración - Movimiento curvilíneo de una partícula

En el movimiento rectilíneo de una partícula, presentamos una resultante F de todas las fuerzas que actuaban sobre una partícula que tenía una dirección constante e igual a la de cualquier movimiento inicial de la partícula. Ahora, si consideramos que la dirección de la fuerza resultante varía con el tiempo, o también si la partícula tiene un movimiento inicial cuya dirección no coincide con la de la resultante, diremos entonces, que tenernos un "movimiento curvilíneo de la partícula". Así, por ejemplo, un proyectil balístico de corto alcance disparado horizontalmente teniendo en cuenta el efecto de la gravedad terrestre realiza un movimiento de trayectoria curvilínea.

En muchos problemas de ingeniería, el movimiento estará restringido a un plano, en estos casos particulares, se dice que la partícula o cuerpo rígido tiene un "movimiento curvilíneo plano", Por ejemplo, si el movimiento de un misil se realiza en el plano XY describiendo una trayectoria Γ. Ver la figura (57), donde se puede apreciar el continuo cambio de la dirección de la velocidad.

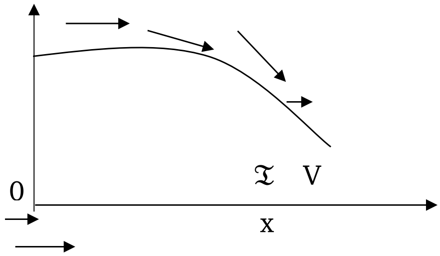


Figura 57. Movimiento curvilíneo de una partícula
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Ecuaciones generales

Para estudiar el movimiento curvilíneo de una partícula, ya sea en el espacio o en un plano, empozaremos con la segunda Ley del Movimiento de Newton, expresada por la ecuación vectorial.

$$F = m \quad a \tag{6.88}$$

Siendo F la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula, (m) su masa y a el vector aceleración, la partícula de masa m al encontrarse bajo la acción de la fuerza resultante F, recibirá una aceleración a que tiene la misma dirección que la fuerza y por supuesto proporcional a su magnitud, La ecuación del movimiento por ser expresada en forma escalar, utilizando obviamente las componentes correspondientes a los distintos sistemas de coordenadas cinemáticas que van a utilizase para describir el movimiento. La decisión de seleccionar uno u otro sistema dependerá de la información de que se disponga en cada problema. Pero para hacerlo se descompondrán todos los vectores en sus componentes en la dirección de los vectores unitarios, siendo siempre la fuerza resultante y también. Como la elección del sistema de coordenadas adecuado, constituye un paso importante en la formulación de los problemas, anexamos para facilidad del usuario un resumen de las distintas ecuaciones del movimiento rectilíneo de una partícula.

Coordenadas rectangulares

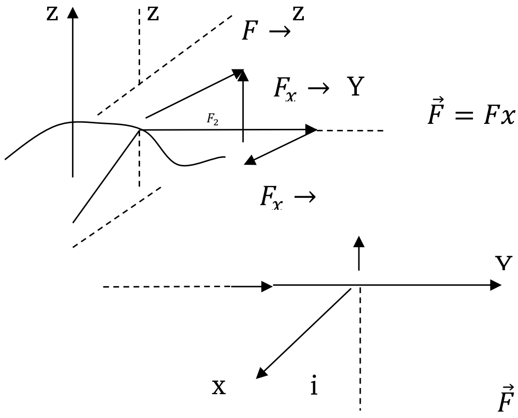
En el caso de movimiento curvilíneo de una partícula en el espacio figura 58, mediante las coordenadas X, Y, Z, la ecuación (1) puede escribirse de las dos maneras siguientes:

a) Forma vectorial

$$\overrightarrow{f} = m\left(a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}\right) \tag{6.89}$$

b) Forma escalar

$$Fx = m \quad a_x, \quad Fy = m \quad a_y, \quad Fz = m \quad a_z \tag{6.90}$$



$$\vec{F} = Fx\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k}$$

$$\vec{F} = Fx\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k}$$

Figura 58. Componentes vectoriales de la fuerza F coordenadas rectangulares
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Coordenadas normal y tangencial

En el caso del movimiento curvilíneo plano de una partícula de la figura 59, en que se requiera de coordenadas normal y tangencial, la ecuación (1) se puede expresarse en las formas:

a) Forma vectorial

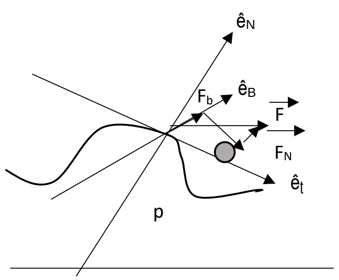
$$\vec{F} = m\left(\ddot{s}\hat{\ell}t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{\ell}n\right) \tag{6.91}$$

b) Forma escalar

$$Ft = m\ddot{s}, Fn = \frac{m\dot{s}^2}{\rho} \tag{6.92}$$

Sabiendo también que:

$$at = \ddot{s} = \dot{v} \ y \ an = V\dot{\theta} = \rho\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}$$



$$\vec{F} = F\hat{e}_N + F\hat{e}_t + F\hat{e}_b$$
$$\hat{e}_N x \hat{e}_t = \hat{e}_b$$

Figura 59. Componentes vectoriales de la fuerza F en coordenadas normal y tangencial
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza. 2019.

Coordenadas polares

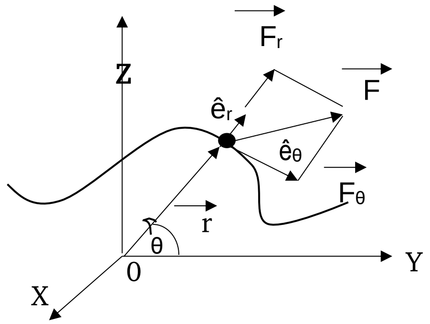
En la figura 60, cuando el movimiento curvilíneo plano de una partícula se describe mediante coordenadas polares, la ecuación (I) cobra forma

a) Forma vectorial:

$$\vec{F} = m\left[\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(\ddot{r}\ddot{\theta} - 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{e}_0 + \ddot{Z}\hat{e}_z\right] \tag{6.93}$$

b) Forma escalar:

$$F_r = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right), F_0 = m\left(\ddot{r}\ddot{\theta} - 2\dot{r}\dot{\theta}\right) \tag{6.94}$$



$$\vec{F} = F\hat{e}r + F\hat{e}\theta$$

Figura. 60. Componentes vectoriales de la fuerza F en coordenadas polares
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza.2019.

Coordenadas cilíndricas

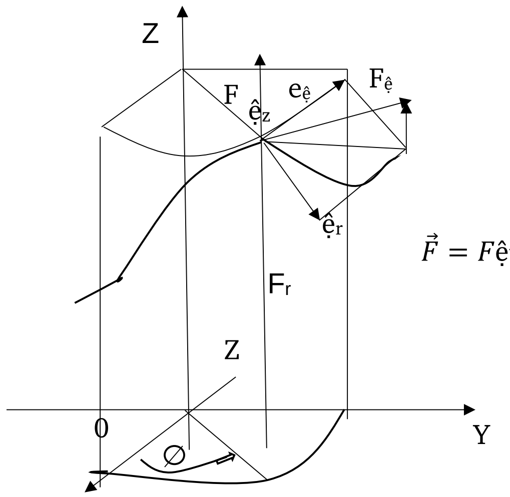
Cuando el movimiento es curvilíneo en el espacio, tal como se representa en la figura 61, se requiere utilizar las coordenadas cilíndricas, la ecuación (1) toma la forma:

a) Forma vectorial

$$\vec{F} = m\left[\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(\ddot{r}\ddot{\theta} - 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{e}_0 + \ddot{Z}\hat{e}_z\right] \tag{6.95}$$

b) Forma escalar

$$F_r = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right),\ F_0 = m\left(\ddot{r}\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right),\ F_z = m\ddot{z} \tag{6.96}$$



$\vec{F} = F\hat{e}r + F\hat{e}\phi + F\hat{e}z$

Figura 61. Componentes vectoriales de la fuerza F en coordenadas cilíndricas
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza. 2019.

Coordenadas esféricas

Para el movimiento curvilíneo de una partícula en el espacio, figura 62, puede emplearse las coordenadas esféricas, la ecuación (!) puede expresarse de la manera siguiente:

c) Forma vectorial

$$\vec{F} = m\,\{(r - r\theta^2 - r\Phi^2 sen^2\theta)\hat{e}_r + (r\theta + 2r\theta - r\Phi^2 sen\theta\cos\theta)\hat{e}_\theta + [(r\theta + 2r\theta)sen + 2r\Phi\theta\cos\theta]e_\theta\} \quad (6.97)$$

d) Forma escalar

$$F_r = m(r - r\theta^2 - r\Phi^2 sen^2\theta) \quad (6.98)$$

$$F_\theta = m(r\theta + 2r\theta - r\Phi^2 sen\theta\cos\theta)$$

$$F_\Phi = m[(r\theta + 2r\theta)sen\theta + 2r\Phi\theta\cos\theta]e_\theta$$

Componentes vectoriales de la fuerza $\vec{F}$ en coordenadas esféricas

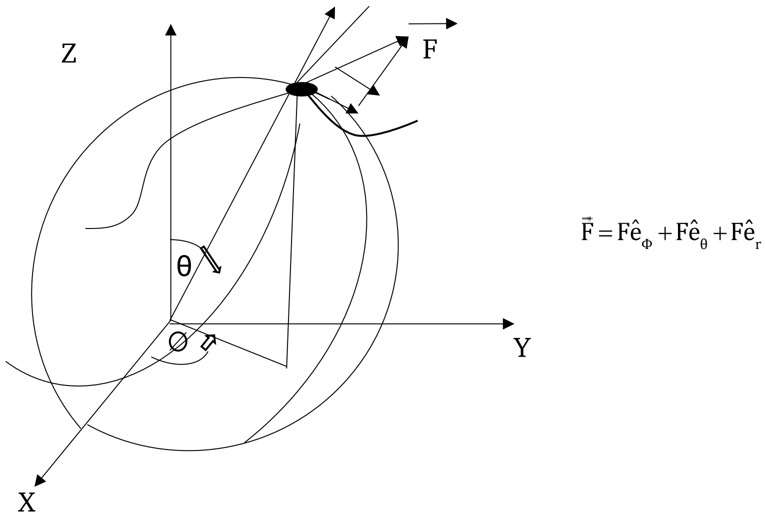


Figura 62. Movimiento curvilíneo de una partícula en el espacio
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza. 2019.

Movimiento de una partícula sobre una trayectoria curvilínea. Ecuaciones generales del movimiento - componentes tangencial y normal

En cinemática, se hizo la descripción intrínseca o absoluta del movimiento de una partícula P, y se encontraron expresiones de la aceleración de la partícula moviéndose en una trayectoria curvilínea en función de sus componentes tangencial y normal. En seguida, se estudiará la forma que adopta la segunda ley de Newton cuando se utiliza dicho sistema de referencia.

En general, cuando una partícula P de masa m está obligada a moverse en el espacio, describiendo una trayectoria curvilínea Γ con una aceleración, es conveniente descomponer dicha aceleración en dos componentes, a saber. la aceleración tangencial a_t, con dirección tangente a la trayectoria Γdel movimiento, y la aceleración normal a_n, de dirección normal a la curva y en el sentido de la concavidad de la trayectoria, apuntando hacia el centro de curvatura. En este caso general, el movimiento de la partícula sobre la trayectoria Γ estará perfectamente determinado cuando se conozca la función s = s(t), que relaciona la coordenada curvilínea s y el tiempo t y en consecuencia hace posible expresar r= r(s) en función del tiempo, figura 63.

Esta descomposición de la aceleración mediante sus componentes normal y tangencial, es una forma sencilla de representación y tiene un significado físico evidente, como veremos a continuación.

Consideramos que a la partícula P que so mueve con una velocidad V, se le aplica una fuerza F, como se muestra en la figura (63). Consecuentemente la partícula se moverá a través de su trayectoria obligada Γ con una aceleración que tienen la misma dirección de la fuerza dada y por supuesto proporcional a su magnitud, y que está determinada por a = F/m. Numéricamente las componentes de dicha aceleración se expresan, como

$$at = \frac{dv}{dt} \tag{6.99}$$

$$an = \frac{V^2}{\rho} \tag{6.100}$$

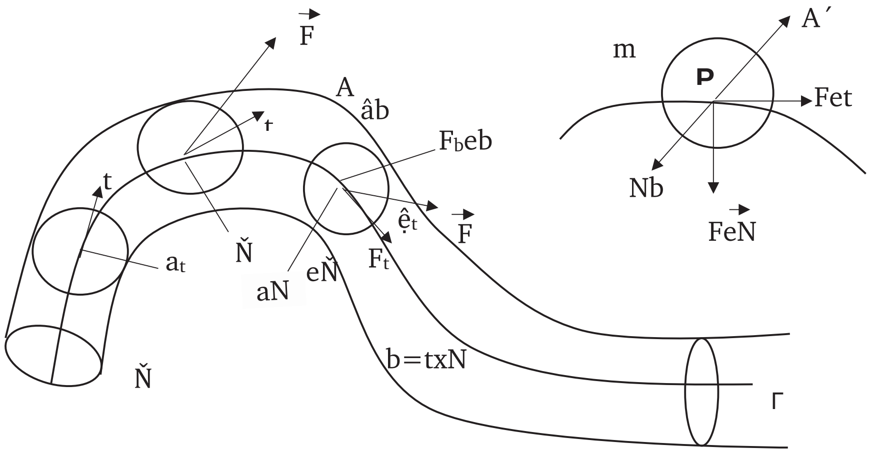


Figura 63. Componentes tangencial y normal del movimiento curvilíneo de una partícula
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza. 2019.

Siendo $\vec{a_t}$ componente tangencial de la aceleración e igual a la derivada de la rapidez respecto del tiempo t y a_n la componente normal de la aceleración cuya magnitud, es la relación del cuadrado de la rapidez entre el radio de curvatura de la trayectoria Γ. Obviamente también se puede descomponer la fuerza F aplicada a la partícula P en tres componentes respecto del triedro intrínseco o terna de Frente $Ft = m \;\; a_t \;\; \hat{e}_t$ fuerza tangencial que cambia la rapidez de la partícula $Fn = m \;\; a_n \;\; \hat{e}_n$ fuerza normal o centrípeta que cambia la dirección de la velocidad tangencial de la partícula y $Fb = m \;\; a_n \;\; \hat{e}_n = 0$ fuerza binomial que en este caso es nula.

La componente normal de la fuerza hace que la partícula no siga la trayectoria rectilínea en la dirección de la tangente, apuntando siempre hacia el centro de curvatura, y es por esta razón, que esta es también llamada "fuerza centrípeta".

La restricción del movimiento rectilíneo de la partícula a través de la trayectoria obligada Γ produce reacciones de los vínculos impuestos, cuyas componentes intrínsecas llamaremos $N_t\hat{e}_t\ N_n\hat{e}_n,\ N_b\hat{e}_b$. Siendo así, la ecuación general del movimiento de la partícula respecto del sistema intrínseco o absoluto de la figura 64, se expresa mediante la fórmula

$$m\ddot{s}\hat{\ell}t + m\frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{\ell}n = (Ft + Nt)\hat{\ell}_t + (Fn + Nn)\hat{\ell}_N + (Fn + Nb)\hat{\ell}_b \qquad (6.101)$$

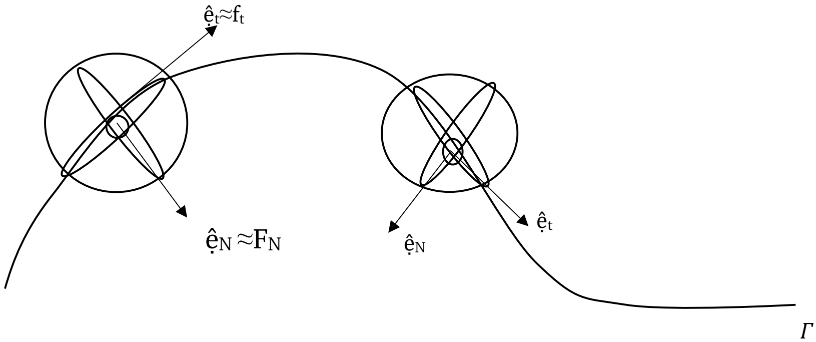


Figura 64. Trayectoria Curva
Fuente: Pinto, Gómez, Ariza. 2019.

Donde la expresión (2) es la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden del movimiento curvilíneo de una partícula con trayectoria obligada.

La ecuación vectorial (2) se puede descomponer en tres ecuaciones escalares, igualando los coeficientes de las componentes en las direcciones $\hat{e}_t,\ \hat{e}_n,\ \hat{e}_b$ por lo que se obtiene el sistema:

$$m\ddot{s} = F_t + N_t \qquad (6.102)$$

$$m\frac{s^2}{\rho} = F_n + N_n \qquad (6.103)$$

$$o \quad = F_b + N_b \qquad (6.104)$$

El sistema de ecuaciones formado por las tres expresiones anteriores (2, 1), (2.2), (2.3) es indeterminado porque tenemos cuatro incógnitas: $s = s(t),\ N_t,\ N_n,\ N_b$. Por lo tanto, se necesita una ecuación adicional.

De las características físicas del movimiento se puede deducir, que, si la partícula se mueve sobre una superficie lisa o rugosa, se debe cumplir en general la siguiente ecuación:

$$Fnt = \pm\mu\sqrt{Nb^2 + Nn^2} \qquad (6.105)$$

El signo de la expresión (2.4) se escogerá de tal manera que N_t se oponga al movimiento, o sea, que N_t tendrá un signo contrario al de V = S. La ecuación (2.4) se anula cuando la superficie es lisa ya que $\mu = 0$.

La ecuación general del movimiento en los dos casos, de superficie lisa o rugosa, se obtiene finalmente sustituyendo los valores de $N_n \; y \; N_b$ dados respectivamente por las expresiones (2.2) y (2.3) en (2.4) y luego se reemplaza el valor obtenido de N_t en la ecuación (2.1), así:

$$N_n = \frac{m\dot{s}^2}{\rho} - Fn \tag{6.106}$$

Y,

$$N_b = -F_b \tag{6.107}$$

Por lo tanto,

$$N_t = \pm\mu\sqrt{Fb^2 + \left(\frac{m\dot{s}^2}{\rho} - F^2 n\right)^2} \tag{6.108}$$

De donde, se obtienen finalmente que

$$m\ddot{s} = Ft = \pm\mu\sqrt{Fb^2 + \left(\frac{m\dot{s}^2}{\rho} - F^2 n\right)^2} \tag{6.109}$$

La expresión (3), es la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden del movimiento de la partícula P expresada en coordenadas intrínsecas y la cual nos permite a través del proceso de integración obtener la función s = s(t).

Referencias Bibliográficas

A. Fogarasy and Smith M. The case for a general method of kinematic analysis of plane mechanisms based on equations of constraint. Part C: Joumal of mechanical Engineering science. Proc. instn. Mech. Engrs. 209. pp. 337-343, united kingdom, 1995.

A. Fogarasy and Smith M. the influence of manufacturing tolerances on the kinematic perfomarce of mechanisms. Part C: journal of mechanical Engineering Science. Procinstn mech Engrs vol 209. Pp. 35-45. 1998.

Beer, F. and Johnston, R. Mecánica Vectorial para Ingenieros, Dinámica. Editorial Mc Graw Hill. 7° edición, México,2010.

K. Hunt. kinematic Geometry of mechanism, Oxford university press, new york, 1978.

J. Lenarcic. kinematics" en the international Encyclopedia of Robotics, R. Dorf y S. Nof, Editores, John wiley and Sons, New York,1988.

K. R. Symon, "mechanics, 3ª Edicion,Addison-wesley,Reading, MA, 1971

Leon, Juan Mecánica Vectorial para Ingenieros. Editorial Limusa.S: A. 2° edición, México,1984.

Ogata, K. Dinámica de sistemas. Editorial Prentice Hall. 1° edición, México, 1995

Pinto, L., Melo, S., Socarrás, C. Mecánica vectorial para Ingenieros Dinámica. Ed. Universidad Simón Bolivar. Barranquilla, Colombia, agosto de 2016.

ISBN 978-958-5178-30-4